

**Hyperbolische Differentialgleichungen  
und  
Klassen fastperiodischer Funktionen**

**Hans Güzler**



Hyperbolische Differentialgleichungen  
und  
Klassen fastperiodischer Funktionen

Inaugural-Dissertation  
zur  
Erlangung der Doktorwürde  
der  
Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Ludwig-Maximilians-Universität  
zu München



vorgelegt  
von  
Hans GÜNZLER  
aus  
Fürth

---

November 1957

Berichterstatter: Professor Dr. W. Maak

Tag der mündlichen Prüfung: 18. 12. 1957

## Inhaltsverzeichnis

|            | Seite |
|------------|-------|
| Einleitung | 4     |

### I Fastperiodische Lösungen einer hyperbolischen Differentialgleichung

|     |                                                                    |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------|----|
| § 1 | Verallgemeinerte Lösungen von $F''_{xx} - F''_{yy} = a(x) \cdot F$ | 11 |
| § 2 | Fastperiodische Lösungen                                           | 21 |
| § 3 | Der Approximationssatz                                             | 25 |
| § 4 | Einige Eigenschaften fastperiodischer Lösungen                     | 34 |
| § 5 | Fourierreihen                                                      | 39 |
| § 6 | Beispiele                                                          | 47 |

### II Eine Erweiterung des Begriffs fastperiodisch

|      |                                                 |    |
|------|-------------------------------------------------|----|
| § 7  | Der Begriff a-fastperiodisch                    | 51 |
| § 8  | Der Approximationssatz                          | 55 |
| § 9  | Fourierreihen                                   | 57 |
| § 10 | a-Fastperiodizität auf beschränkten Intervallen | 59 |
| § 11 | Beispiele                                       | 69 |

|          |                             |    |
|----------|-----------------------------|----|
| Anhang I | Einige Sätze der Maßtheorie | 74 |
|----------|-----------------------------|----|

|           |                                                                                            |    |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Anhang II | Über die Lösungen der Differentialgleichung<br>$h''(x) - (a(x) - \omega^2) \cdot h(x) = 0$ | 77 |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|

|            |                                                                  |    |
|------------|------------------------------------------------------------------|----|
| Anhang III | Verallgemeinerte Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen | 83 |
|------------|------------------------------------------------------------------|----|

|             |    |
|-------------|----|
| Anmerkungen | 92 |
|-------------|----|

|                      |     |
|----------------------|-----|
| Literaturverzeichnis | 108 |
|----------------------|-----|

Digitized by the Internet Archive  
in 2026

## Einleitung

Die von H. Bohr eingeführten analytischen fastperiodischen Funktionen (vgl. Maak (9), S.222) lassen sich folgendermaßen charakterisieren:  $F(z) = F(x+iy) = F(x,y)$  ist eine in einem Streifen  $c \leq x \leq d$ ,  $y$  beliebig reell, definierte, komplexwertige Funktion, die dort, gleichgradig für alle  $x$  aus  $\{c,d\}$ , fastperiodisch in  $y$  ist und die dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Rea}(F) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}(F) \quad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Rea}(F) = -\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im}(F)$$

genügt, für die also auch die Potentialgleichung  $\Delta F = 0$  gilt.

Bei dieser Auffassung erhebt sich nun die Frage, ob und mit welchen Ergebnissen eine Theorie fastperiodischer Funktionen  $F(x,y)$  durchführbar ist, wenn man statt der Potentialgleichung andere partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, z. B. solche vom hyperbolischen Typ, zugrundelegt.

Man kann dabei allerdings nicht derartig schöne und abgerundete Ergebnisse wie in dem von Bohr behandelten Fall erwarten, da den Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen der Analytizitätscharakter abgeht, dafür ist die behandelbare Funktionenklasse umfassender, bei geeignetem Vorgehen werden auch solche Funktionen miterfaßt, die nicht einmal differenzierbar sind.

Eine solche Theorie gestattet dann auch Anwendungen auf Funktionen einer Veränderlichen, man kann damit in der folgenden Weise Fastperiodizität auf der Zahlengeraden definieren: Die Funktion  $f(x)$  heißt "fastperiodisch", wenn es eine Funktion  $F(x,y)$  gibt, die im Sinne der oben erwähnten Theorie fastperiodisch ist und die z. B. die Anfangsbedingungen  $F(x,0) = f(x)$  und  $F'_y(x,0) = 0$  erfüllt. Effektiv hat man damit statt der im Bohrschen eindimensionalen Fall verwendeten Translationsoperatoren  $T_y f(x) := f(x+y)$  allgemeinere Translationsoperatoren durch die Definitionsgleichung

$$T_y f(x) := F(x,y)$$

eingeführt.

Besonders im Hinblick auf solche Anwendungen und die daraus folgenden Approximationssätze erscheint der Versuch der Durchführung einer derartigen Theorie lohnenswert.

In der vorliegenden Arbeit wird nun für den Fall, daß man eine hyperbolische Differentialgleichung der Form

$$(a) \quad F''_{xx} - F''_{yy} = a(x) \cdot F$$

zugrundelegt (auf solche Differentialgleichungen kann man sich in gewissem Sinne beschränken<sup>1</sup>), unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gezeigt werden, wie sich eine solche Theorie fastperiodischer Lösungen von (a) aufbauen läßt (I. Teil); mit den dabei gewonnenen Resultaten kann man dann zu einer Erweiterung des Begriffs "fastperiodische Funktion auf der reellen Zahlengeraden" gelangen, die anschließend behandelt wird (II. Teil).

Um beurteilen zu können, inwieweit die so erhaltenen Ergebnisse neu sind, möge kurz auf die bisher in dieser Richtung erzielten Sätze eingegangen werden:

Schon bei Delsartre (3) 1938 findet sich ein Teil der oben skizzierten Ideen, durchgeführt hat Delsartre diese Gedanken aber nur für den Fall eines speziellen  $a(x)$  (i. w. =  $k/x^2$ ,  $k$  reell, vgl. § 6 u. 11, Bsp. 4), die Untersuchung allgemeinerer Typen von Differentialgleichungen scheiterte bei ihm daran, daß seine Beweismethode (gewisse Integraltransformationen, die eine Zurückführung auf den Fall gewöhnlicher Bohr'scher fastperiodischer Funktionen der Zahlengeraden gestatten) speziell auf dieses eine Beispiel zugeschnitten war. Weiter führten dann die Untersuchungen von Levitan (8) 1949, er formulierte den Begriff fastperiodisch für beliebige gerade stetige Funktionen  $f(x)$ , die auf der reellen Zahlengeraden definiert sind, so wie oben angedeutet: Zunächst wird eine zweimal differenzierbare Funktion  $f(x)$  fastperiodisch (im verallgemeinerten Sinne) genannt, wenn die Lösung von (a) zu den Anfangsbedingungen  $F(x,0)=f(x)$ ,  $F'_y(x,0)=0$  in  $y$  Bohr-fastperiodisch ist, und zwar gleichgradig in  $x$ . Der dadurch eingeführte Verschiebungsoperator  $T_y f(x) = F(x,y)$  kann dann auf beliebige stetige gerade

Funktionen fortgesetzt werden, sodaß auch für diese Fastperiodizität im obigen Sinne erklärt ist. Unter der Voraussetzung  $a(x) = O(x^{-3-\varepsilon})$  für  $x \rightarrow \infty$ , und zwar für jedes  $\varepsilon > 0$ ,  $a(x)$  positiv, gerade und stetig, konnte dann Levitan einen Approximationssatz beweisen. In der Arbeit von Marčenko (13) 1950 wird die Gleichwertigkeit von Approximationssatz und Definition der Fastperiodizität durch die verallgemeinerten  $T_y$ -Operatoren unter der etwas allgemeineren Voraussetzung  $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) |a(x)| dx < \infty$ ,  $a(x)$  reellwertig, stetig und gerade bewiesen, außerdem ist dort der Begriff fastperiodisch auf lokal-integrierbare<sup>2</sup> Funktionen  $f(x)$  ausgedehnt worden. Berezanskij beweist schließlich in (1) 1953 einen Approximationssatz unter der Voraussetzung  $a(x) = O(x^{-2-\varepsilon})$  für  $x \rightarrow \infty$ , bei ihm findet sich auch eine Parsevalgleichung für solche verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen.

Alle diese Ergebnisse sind als Spezialfälle in den hier bewiesenen Sätzen enthalten. Es gelingt nämlich, den Begriff fastperiodisch für beliebige komplexwertige lokalintegrierbare Funktionen  $F(x,y)$  bzw.  $f(x)$  und beliebige komplexwertige lokalintegrierbare  $a(x)$  zu definieren, wobei das zugrundeliegende Definitionsintervall  $I$  auf der  $x$ -Achse ebenfalls beliebig, auch endlich, gewählt werden kann. Ohne irgend welche zusätzlichen Voraussetzungen über  $a(x)$  kann man dann für diese verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen einen Approximationssatz beweisen, wobei die Approximationsart durch Wahl der hier vorkommenden "Normfunktion  $\varphi(x)$ " auch noch weitgehend beeinflussbar ist (bisher behandelter Fall war  $\varphi(x) \equiv 1$ ).

Möglich werden diese Verallgemeinerungen dadurch, daß man von der bisherigen konkreten Auffassung der Funktionen  $F(x,y)$  zu einer abstrakten übergeht, d.h. man betrachtet das einzelne  $F(x,y)$  nicht mehr als eine bestimmte Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit vorgegebenen Anfangsbedingungen, für die man eine geeignete Integraldarstellung sucht, in der man die Funktion  $F(x,y)$  dann weiter behandelt, sondern man faßt das  $F(x,y)$  als f.p.

Vektor eines passenden Banach-Raumes auf. Entscheidendes Hilfsmittel ist dabei ein von W. Maak in (10) 1950 bewiesener Approximationssatz für vektorwertige fastperiodische Funktionen, der für die Untersuchung verallgemeinerter fastperiodischer Funktionen von fundamentaler Bedeutung ist und der infolge der geringen Voraussetzungen, unter denen er dort bewiesen werden konnte, auch bei der Behandlung anderer fastperiodischer Funktionenklassen hervorragende Dienste leistet.<sup>3</sup>

Im einzelnen gliedert sich die vorliegende Arbeit folgendermaßen:

In § 1 werden "verallgemeinerte Lösungen  $F(x,y)$  von (a)" definiert (Def.1), und zwar geschieht dies dadurch, daß man (a) in eine Integralgleichung umwandelt; daß diese Definition sinnvoll ist, zeigen die Sätze 1.1 und 1.2. Die Lösungsmannigfaltigkeit dieser Integralgleichung bildet dann einen Banach-Raum  $\mathcal{L}$  (Def.2, Satz 1.3), wobei als Norm der Funktion  $F(x,y)$   $\|F\| := \sup\{\varphi(x) \cdot |F(x,y)| : y \text{ reell, } x \text{ aus } I\}$  zugrundegelegt wird. Die "Normfunktion  $\varphi(x)$ " kann dabei auf  $I$  beliebig positiv vorgegeben werden. Es folgt in § 2 die Definition fastperiodischer Vektoren aus  $\mathcal{L}$  (Def.3), d.s. Vektoren, die bezüglich der Translationsgruppe der  $T_c$ ,  $T_c F(x,y) = F(x,y+c)$  ( $c$  reell) fastperiodisch sind, für die es also zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Einteilung der reellen Zahlengeraden in endlich viele Teilmengen  $A_1, \dots, A_m$  gibt, sodaß für irgend zwei  $c', c$  aus einem  $A_v$  gilt  $\|T_{c'} F - T_c F\|_\varphi < \varepsilon$ .

Bemerkenswert ist dabei, daß es genügt,  $\sup_{x \in I} \varphi(x) \cdot |F(x, y_0)| < \infty$  für ein einziges  $y_0$  vorauszusetzen, fastperiodische Funktionen haben dann von selbst eine endliche Norm (Satz 2.1).

Nach einer kurzen Behandlung gerader fastperiodischer Funktionen werden dann in § 3 zunächst die elementaren Vektoren aus  $\mathcal{L}$  bestimmt, d.s. solche Funktionen  $F(x,y)$  aus  $\mathcal{L}$ , die einen endlich-dimensionalen, gegenüber den Translationen  $T_c$  invarianten Teilmodul von  $\mathcal{L}$  bilden. Da die  $T_c$  eine abelsche Gruppe ergeben, sind diese Teilmoduln nach dem Schurschen Lemma eindimensional und werden

von Funktionen  $F(x,y)$  aufgespannt, die die Form  $h_\omega(x) \cdot e^{i\omega y}$  haben; aus der Tatsache, daß es sich dabei um verallgemeinerte Lösungen von (a) handelt, folgt für die  $h_\omega(x)$  die Gleichung

$$(b) \quad h_\omega''(x) - (a(x) - \omega^2)h_\omega(x) = 0$$

(Satz 3.1 und 3.2). Unter Anwendung des oben erwähnten Approximationssatzes für fastperiodische Vektoren fließt daraus sofort ein Approximationssatz für fastperiodische verallgemeinerte Lösungen von (a), jede solche Funktion ist im Sinne der Norm beliebig genau durch endliche Linearkombinationen elementarer Vektoren, also Summen der Form

$$\sum h_\omega(x) \cdot e^{i\omega y}$$

approximierbar und diese Eigenschaft ist charakteristisch für fastperiodische Vektoren (Satz 3.3). Eine - allerdings nur kurze - Diskussion der Rolle der Normfunktion  $\varphi$  beschließt diesen Abschnitt.

§ 4 bringt einige Folgerungen aus dem Approximationssatz, so sind fastperiodische Lösungen von (a) stets stetig, die Fastperiodizität läßt sich auch mittels Translationszahlen wie im Falle Bohr-fastperiodischer Funktionen auf der reellen Zahlengeraden formulieren (Satz 4.1 und 4.2).

Daß man bei solchen fastperiodischen Funktionen auch von Fourierreihen in einem vernünftigen Sinne sprechen kann, zeigt § 5; die drei hier möglichen Ansätze zur Gewinnung einer Fourierreihe geben dabei stets dieselbe Reihe (Satz 5.2 und 5.7), es gilt eine Parsevalgleichung (Satz 5.3 und 5.8) mit der daraus folgenden eindeutigen Bestimmtheit einer fastperiodischen verallgemeinerten Lösung von (a) durch ihre Fourierreihe, diese Fourierreihe konvergiert "im Mittel" gegen  $F(x,y)$  (Satz 5.8).

Den Abschluß des ersten Teils bilden in § 6 einige Beispiele zu den vorangegangenen Sätzen, insbesondere werden für verschiedene spezielle  $a(x)$ ,  $I$  und  $\varphi(x)$  die elementaren fastperiodischen Funktionen (vor allem in ihrer Abhängigkeit von  $\omega$ ) angegeben.

Im zweiten Teil werden diese Ergebnisse auf Funktionen einer Veränderlichen, die auf dem Grundintervall  $I$  definiert und dort lokal integrierbar sind, angewendet.

Eine derartige Funktion  $f(x)$  wird "a-fastperiodisch" genannt (diese Eigenschaft hängt u.a. von der Wahl der Funktion  $a(x)$  in (a) ab), wenn es eine fastperiodische verallgemeinerte Lösung  $F_f(x,y)$  von (a) gibt, sodaß  $F_f(x,0) = f(x)$  (Def.7)<sup>4</sup>. **Versehen mit der Norm**

$$\|f\|_f := \inf (\|F\|_f : F \text{ f.p. aus } \mathcal{F} \text{ \& } F(x,0)=f(x))$$

bilden diese a-fastperiodischen Funktionen einen Banach-Raum (Satz 7.1); bei unendlichem Intervall,  $I = (-\infty, \infty)$ , kann man dabei die Definition von a-fastperiodisch abschwächen (Satz 7.2), dort wird  $\|f\|_f$  angenommen.

Der Approximationssatz 3.3 liefert, auf den Fall a-fastperiodischer Funktionen angewendet, in § 8 sofort einen Approximationssatz für solche Funktionen, der diese wieder charakterisiert: Zu jedem positiven  $\epsilon$  gibt es endlich viele  $h_{\omega_1}(x), \dots, h_{\omega_m}(x)$ , die Lösungen von (b) zu  $\omega_v$  sind, sodaß

$$\|f - \sum_{v=1}^m h_{\omega_v}\|_f < \epsilon ;$$

insbesondere läßt sich also die Funktion  $f(x)$  selbst auf  $I$  durch solche Summen  $\mathcal{F}$ -gleichgradig beliebig genau annähern (Satz 8.1). Der Satz 8.2 zeigt, daß es sich bei dem Begriff a-fastperiodisch um eine Erweiterung des Begriffs "fastperiodische Funktion auf der reellen Zahlengeraden" handelt: Eine Funktion ist genau dann Bohr-fastperiodisch, wenn sie 0-fastperiodisch ist (a-fastperiodisch zu  $a(x) \equiv 0$ ,  $I = (-\infty, \infty)$ ,  $\rho(x) \equiv 1$ ).

Nach einem kurzen Eingehen (§ 9) auf die aus § 5 über die Fourierreihen a-fastperiodischer Funktionen sich ergebenden Folgerungen (diese Fourierreihen sind i.a. nicht eindeutig durch  $f(x)$  bestimmt, sie bestimmen jedoch rückwärts  $f(x)$  eindeutig) wird in § 10 der Fall eines endlichen Intervalls  $I$  behandelt. Das Hauptergebnis ist das folgende: (Satz 10.1)

Ist  $I$  endlich,  $\rho(x) \equiv 1$ ,  $a(x)$  über  $I$  integrierbar, so ist eine auf  $I$  definierte Funktion genau dann a-fastperiodisch, wenn sie dort gleichmäßig stetig ist, d.h. alle überhaupt in Frage kommenden Funktionen sind a-fastperiodisch .

(Analogon im Bohrschen Fall: Alle auf einem kompakten Intervall definierten stetigen Funktionen können (periodisch) zu Bohr-fastperiodischen Funktionen fortgesetzt werden.)

Der Beweis wird so geführt, daß man mittels Picardscher Iteration eine periodische Lösung  $P_f$  von (a) konstruiert, die dann nach Satz 4.2 fastperiodisch ist.

Nach diesem Resultat lassen sich also alle stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen durch endliche Linearkombinationen von Lösungen von (b) beliebig genau gleichmäßig approximieren - ein Analogon zum Weierstraßschen Approximationssatz.

Der letzte Abschnitt (§ 11) bringt dann wieder einige Beispiele zu speziellen  $a(x)$ , insbesondere wird die genaue Form des obigen Approximationssatzes für stetige Funktionen in diesen Fällen behandelt.

Eine Reihe von Sätzen, die in dieser Arbeit verwendet werden, sind im Anhang zusammengestellt; sie sind teils bekannt, aber nicht allgemein geläufig (in diesem Falle sind sie ohne Beweis angegeben), teilweise würde ihr Beweis im Hauptteil zu störenden Längen führen. Anhang I bringt einige Sätze aus der Maßtheorie, in Anhang II werden die Eigenschaften der Lösungen von (b), die hier interessieren, zusammengestellt, in Anhang III findet sich eine genauere Untersuchung der verallgemeinerten Lösungen von (a), insbesondere Existenz- und Eindeutigkeitsätze. Die durch kleine hochgestellte Nummern gekennzeichneten Anmerkungen, Ergänzungen und Erläuterungen sind ganz am Schluß gesammelt, dort finden sich auch (bes. in<sup>1</sup>) Hinweise auf Verallgemeinerungsmöglichkeiten.

# I Fastperiodische Lösungen einer hyperbolischen Differentialgleichung

## § 1 Verallgemeinerte Lösungen von $F''_{xx} - F''_{yy} = a(x) \cdot F$

Es werden Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichung

$$(1) \quad F''_{xx}(x,y) - F''_{yy}(x,y) = a(x) \cdot F(x,y)$$

betrachtet. Für spätere Untersuchungen müssen diese Lösungen in einem gewissen Sinne einen vollständigen linearen Raum bilden; der übliche Lösungsbegriff erweist sich dabei als zu eng <sup>5</sup>, man transformiert deshalb (1) auf die Form

$$(2) \quad G''_{st}(s,t) = a\left(\frac{s+t}{2}\right) \cdot G(s,t)$$

verwandelt diese Differentialgleichung in eine Integralgleichung und betrachtet deren Lösungen.

Zur Durchführung dieser Überlegungen benützen wir die folgenden Voraussetzungen und Bezeichnungen:

Alle vorkommenden Definitionsbereiche sind der reellen Zahlengeraden  $R$  bzw. der reellen Ebene  $R^2$  entnommen; die darauf definierten Funktionen sind endlich komplexwertig, d.h. in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches ist der Funktionswert eine endliche komplexe Zahl. Alle vorkommenden Funktionen werden, soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil vermerkt wird, als meßbar vorausgesetzt, das zugrunde gelegte Maß ist dabei stets das gewöhnliche Lebesgue-Maß. Statt "eine Funktion hat auf jeder kompakten Teilmenge von  $M$  eine gewisse Eigenschaft" sagen wir kurz "die Funktion hat diese Eigenschaft lokal".

Sei nun  $I = \{c,d\}$  ein beliebiges Intervall von  $R$ ;  $I$  kann offen  $(c,d)$ , halboffen  $(c,d]$  bzw.  $[c,d)$  oder abgeschlossen  $[c,d]$  sein, es kann endlich  $(c>-\infty, d<\infty)$  oder unendlich  $(c$  oder  $d$  bzw. beide  $=\infty)$  sein. Stets sei  $c < d$ .

Sei weiter  $a(x)$  eine auf  $I$  definierte, endlich komplexwertige, meßbare Funktion, die dort lokal integrabel ist, die also über jedes abgeschlossene beschränkte Teilintervall von  $I$  integrabel ist.

$I$  und  $a(x)$  sind im folgenden als fest gegeben zu betrachten.

Definition 1: Eine Funktion  $F(x,y)$ , die auf dem Streifen  $P = I \times \mathbb{R} = \{ (x,y) : x \text{ aus } I \text{ \& } -\infty < y \text{ reell} < \infty \}$  definiert, endlich komplexwertig sowie lokal integrabel ist, für die außerdem  $a(x) \cdot F(x,y)$  lokal auf  $P$  integrabel ist <sup>6</sup>, heißt "verallgemeinerte Lösung von (1) zu  $x_0$ ", falls es ein  $x_0$  aus  $I$  sowie Funktionen  $U(s), V(t)$  gibt, sodaß auf  $B$

$$(3) \quad G(s,t) = U(s) + V(t) + \frac{1}{4} \iint_{b(s,t)} a\left(\frac{s+t'}{2}\right) G(s',t') ds' dt'$$

wo  $G(s,t) := F\left(\frac{s+t}{2}, -\frac{s+t}{2}\right)$

$U(s), V(t)$  für alle reellen  $s$  bzw.  $t$  definiert und endlich komplexwertig sind

$B$  der durch die Drehstreckung  $\begin{matrix} 2x = s+t \\ 2y = -s+t \end{matrix}$  aus  $P$  entstehende Streifen  $\{ (s,t) : s+t \text{ aus } 2I \}$

$b(s,t) = b(s,t;x_0)$  ein rechtwinkliges Dreieck in der  $s,t$ -Ebene ist, dessen Katheten achsenparallel sind und im Punkt  $(s,t)$  endigen, und dessen Hypotenuse auf der Geraden  $s+t = 2x_0$  liegt (Fig. 1). <sup>6\*</sup>

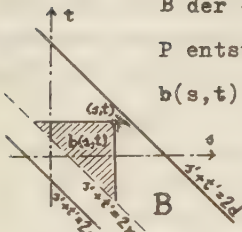


Fig. 1

Da  $H(s,t) := \iint_{b(s,t)} a\left(\frac{s+t'}{2}\right) G(s',t') ds' dt'$  auf  $B$  stetig <sup>7</sup>, also sicher lokal integrabel ist, folgt mit Fubini aus (3), daß sowohl  $U(s)$  als auch  $V(t)$  lokal integrabel sind .

Nach obiger Definition scheint in der Aussage "die Funktion  $F$  ist verallgemeinerte Lösung von (1)" die Gerade  $x=x_0$  eine ausgezeichnete Rolle zu spielen. Daß dem nicht so ist, besagt der folgende Satz:

**Satz 1.1** Sind  $x_0, x_1$  irgend zwei Zahlen aus  $I$ , und ist  $F$  verallgemeinerte Lösung von (1) zu  $x_0$ , so ist  $F$  auch verallgemeinerte Lösung von (1) zu  $x_1$ .

**Beweis:** Es ist lediglich zu zeigen, daß  $D(s,t) := \iint_{b_0} aG - \iint_{b_1} aG$  auf  $B$  wieder von der Form  $u(s) + v(t)$  ist, wenn  $b_v(s,t)$  das zu  $x_v$  ( $v = 0,1$ ) gehörige Dreieck ist.

Sei nun  $x_0 < x_1$ ; wir behaupten dann, daß auf  $B$  die Darstellung gilt

$$(4) \quad D(s,t) = \iint_{\tau(s)} aGk ds dt - \iint_{\pi(t)} aGk ds dt ;$$

dabei hängen die Bereiche  $\tau(s)$  bzw.  $\pi(t)$  nur von  $s$  bzw.  $t$  ab, sie und die Funktion  $k(s,t)$  sind folgendermaßen erklärt:

$t_0$  sei eine fest gewählte reelle Zahl (z.B. 0); damit gilt



$$k(s,t) := \begin{cases} -1 & \text{für } t > t_0, s \text{ beliebig reell} \\ +1 & \text{für } t \leq t_0, " " " \end{cases} ;$$

$\pi(t)$  ist das Parallelogramm (vgl. Fig. 2) zwischen  $s+t=2x_0$ ,  $s+t=2x_1$ ,  $t=t_0$  und  $t=t_1$ ;

$\tau(s)$  ist das "Trapez" zwischen  $s+t=2x_0$ ,  $s+t=2x_1$ ,  $t=t_0$  und  $s=s$  (vgl. Fig. 3), das auch in ein oder zwei Dreiecke ausarten kann, z.B. hat man für den Fall von Fig. 4

Fig. 2



Fig. 3

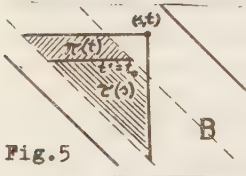


Fig. 5



Fig. 6

$$\iint_{\tau(s)} aGk = \iint_{\Delta \tau_1} aG - \iint_{\Delta \tau_2} aG .$$

Ist nun der Punkt  $(s,t)$

rechts von  $s+t=2x_1$ , d.h.

$s+t \geq 2x_1$ , so gilt

$D(s,t) = \iint_{b_0 - b_1} aG ds dt$ ; ist dabei  $t \leq t_0$ , dann wird  $b_0(s,t) - b_1(s,t) = \tau(s) - \pi(t)$ , und damit ( $k$  ist hier stets  $=+1$ )

$$D(s,t) = \iint_{\tau(s) - \pi(t)} aG = \iint_{\tau(s)} aGk - \iint_{\pi(t)} aGk .$$

Ist  $t > t_0$  so wird für den Fall von Fig. 5

$$D(s,t) = \iint_{\tau(s) \cup \pi(t)} aG = \iint_{\tau(s)} aG + \iint_{\pi(t)} aG = \iint_{\tau(s)} aGk - \iint_{\pi(t)} aGk ,$$

liegt für  $t > t_0$  ( $s,t$ ) so wie in Fig. 6, dann

$$\text{gilt } D(s,t) = \iint_{(\pi - \tau_2) \cup \tau_1} aG = \left( \iint_{\pi} - \iint_{\tau_2} + \iint_{\tau_1} \right) = \iint_{\tau(s)} aGk - \iint_{\pi(t)} aGk ;$$

für den noch übrigbleibenden Fall von  $s+t \geq 2x_1$ ,  $t > t_0$  erschließt man genauso leicht die Gültigkeit von (4).

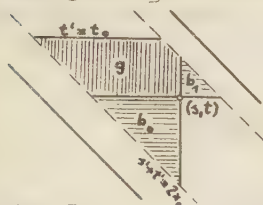


Fig. 7

Liegt der Punkt  $(s, t)$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$ , d.h. ist  $2x_0 \leq s+t \leq 2x_1$ , so gilt im Fall der Fig. 7

$$D(s, t) = \iint_{b_1(s, t)} \iint_{b_2(s, t)} \iint_{b_3(s, t)} aG = \iint_{\tau(s)} aGk - \iint_{\pi(t)} aGk.$$

Die weiteren hier möglichen Lagen von  $(s, t)$  sowie der Fall  $s+t < 2x_0$  erledigen sich entsprechend.

Da man für  $x_1 < x_0$  die Gleichung (4) analog bestätigt, ist somit ihre Richtigkeit allgemein gesichert und damit  $D(s, t)$  von der Form  $u(s) + v(t)$ . Aus (3) für  $x_0$  und (4) erhält man dann (3) für  $x_1$ :

$$G(s, t) = U_0(s) + u(s) + V_0(t) + v(t) + \frac{1}{4} \iint_{b_1(s, t)} aG = U_1 + V_1 + \frac{1}{4} \iint_{b_1(s, t)} aG.$$

Auf Grund von Satz 1.1 kann in "F ist verallgemeinerte Lösung von (1) zu  $x_0$ " der Zusatz "zu  $x_0$ " im folgenden weggelassen werden.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß Definition 1 wirklich eine Verallgemeinerung des üblichen Lösungsbegriffes liefert:

Satz 1.2 Ist  $F(x, y)$  auf  $P$  zweimal stetig differenzierbar<sup>8</sup> und dort Lösung von (1), so ist dort  $F$  verallgemeinerte Lösung von (1).

Ist umgekehrt  $F$  auf  $P$  verallgemeinerte Lösung von (1), ist weiter  $F$  in einer vollen<sup>9</sup> Umgebung von  $(x_1, y_1)$  zweimal stetig differenzierbar<sup>8</sup>, und ist  $a(x)$  in  $x_1$  stetig<sup>10</sup>, so genügt  $F$  in  $(x_1, y_1)$  der Differentialgleichung (1).

Beweis: Ist  $F(x, y)$  auf  $P$  zweimal stetig differenzierbar, so gilt das entsprechende auch von  $G(s, t)$  auf  $B$ ; es wird

$$G'_t(s, t) = \frac{1}{2} F'_x \left( \frac{s+t}{2}, \frac{-s+t}{2} \right) + \frac{1}{2} F'_y \left( \frac{s+t}{2}, \frac{-s+t}{2} \right),$$

$$G''_{st} = G''_{ts} = \frac{1}{4} (F''_{xx} - F''_{xy} + F''_{yx} - F''_{yy}) = \frac{1}{4} (F''_{xx} - F''_{yy}) \quad \text{oder}$$

$$G''_{ts}(s, t) = \frac{1}{4} a \left( \frac{s+t}{2} \right) G(s, t).$$

Ist nun  $x_0$  beliebig aus  $I$  gewählt, so gilt nach Fubini <sup>11</sup>

$$(5) \quad \iint_{b(s,t)} a(s',t') ds' dt' = \int_{2x_0-s}^t dt' \int_{2x_0-t'}^s ds' = \int_{2x_0-t}^s ds' \int_{2x_0-s'}^t dt' \quad (\text{vgl. Fig. 1})$$

also erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \iint_{b(s,t)} a\left(\frac{s+t'}{2}\right) G(s',t') ds' dt' &= \frac{1}{4} \int_{2x_0-s}^t \int_{2x_0-t'}^s G_{ts}''(s',t') ds' dt' = \\ &= \int_{2x_0-s}^t (G_t'(s,t') - G_t'(2x_0-t',t')) dt' = \\ &= G(s,t) - G(s, 2x_0-s) - \int_{2x_0-s}^t G_t'(2x_0-t',t') dt' = \\ &= U(s) + V(t) + G(s,t), \end{aligned}$$

wenn man z.B.  $U(s) := -G(s, 2x_0-s) - \int_{2x_0-s}^0 G_t'(2x_0-t',t') dt'$ ,

$$V(t) := -\int_0^t G_t'(2x_0-t',t') dt' \quad \text{setzt;}$$

das zu  $F$  gehörige  $G$  genügt also (3) auf  $B$  (alle übrigen Voraussetzungen über  $G$  sind wegen der Stetigkeit von  $F$  und  $G$  trivialerweise erfüllt),  $F$  ist damit verallgemeinerte Lösung von (1).

Sei nun umgekehrt  $F$  verallgemeinerte Lösung von (1), d.h. für das zugehörige  $G(s,t)$  gilt mit passenden  $U(s)$  und  $V(t)$

$$(3') \quad G(s,t) = U(s) + V(t) + \frac{1}{4} \iint_{b(s,t)} a G ds' dt' =: U(s) + V(t) + \frac{1}{4} H(s,t).$$

Wir zeigen nun zunächst den auch für später wichtigen

**Hilfssatz:** Ist  $G(s,t)$  im Punkt  $(s_1, t_1)$  stetig <sup>12</sup>, ist  $G(s,t)$  auf einer offenen Menge  $M$ , die  $b(s_1, t_1)$  enthält, <sup>13</sup> beschränkt, sonst auf  $B$  zusammen mit  $a \cdot G$  lokal integrierbar, so ist das gemäß (3')  $G$  zugeordnete  $H(s,t)$  im Punkt  $(s_1, t_1)$  nach  $s$  und  $t$  differenzierbar und es gelten die Formeln (6) und (6').

Zum Beweis wählen wir ein Dreieck  $b_2 = b(s_2, t_2)$  aus  $M$ , sodaß  $b(s_1, t_1)$  - mit Ausnahme seiner Hypotenuse - ganz im Innern von  $b_2$  liegt <sup>13</sup>; in  $b_2$  wird sich alles folgende abspielen.

Da  $H(s, t)$  überall stetig ist, sind  $U(s)$  und  $V(t)$  auf  $b_2$  beschränkt, sodaß also alle folgenden Integrale für  $(s, t)$  aus I existieren

$$\begin{aligned} H(s, t) &= \iint_{b(s, t)} a\left(\frac{s+t'}{2}\right) G(s', t') ds' dt' = \\ &= \iint_{b(s, t)} a\left(\frac{s+t'}{2}\right) U(s') ds' dt' + \iint_{b(s, t)} a V(t') ds' dt' + \frac{1}{4} \iint_{b(s, t)} a H(s', t') ds' dt' \\ &=: I + II + \frac{1}{4} III. \end{aligned}$$

Für I erhält man mit (5)

$$I = \int_{2x_0-s}^t W(s, t') dt', \quad W(s, t') := \int_{2x_0-t'}^s a\left(\frac{s+t'}{2}\right) U(s') ds'.$$

Der Integrand  $W(s, t')$  ist dabei in  $t'$  für  $t' = t_1$  stetig ( $s$  fest  $= s_1$ ), wie die folgenden Abschätzungen zeigen:

$$\begin{aligned} |W(s_1, t') - W(s_1, t_1)| &= \left| \int_{2x_0-t'}^{s_1} a\left(\frac{s_1+t'}{2}\right) U(s') ds' - \int_{2x_0-t_1}^{s_1} a\left(\frac{s_1+t_1}{2}\right) U(s') ds' \right| + \\ &\quad + \left| \int_{2x_0-t'}^{s_1} a\left(\frac{s_1+t_1}{2}\right) U(s') ds' - \int_{2x_0-t_1}^{s_1} a\left(\frac{s_1+t_1}{2}\right) U(s') ds' \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{2x_0-t'}^{s_1} \left( a\left(\frac{s_1+t'}{2}\right) - a\left(\frac{s_1+t_1}{2}\right) \right) U(s') ds' \right| + \\ &\quad + \left| \int_{2x_0-t_1}^{s_1} a\left(\frac{s_1+t_1}{2}\right) U(s') ds' \right| \leq \\ &\leq \sup_{(s_1, t) \in b_2} |U(s)| \cdot \left( \left| \int_{2x_0-t_2}^{s_1} a\left(\frac{s_1+t'}{2}\right) - a\left(\frac{s_1+t_1}{2}\right) ds' \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{2x_0-t_1}^{2x_0-t'} a\left(\frac{s_1+t_1}{2}\right) ds' \right| \right) \end{aligned}$$

beide in der letzten Klammer vorkommenden Integrale gehen für  $t' \rightarrow t_1$  gegen 0 (Anhang I, 2) und 3));

somit ist I in  $(s_1, t_1)$  nach  $t$  differenzierbar und hat als Ableitung  $W(s_1, t_1)$ .

Weiter wird nach (5)

$$II = \int_{2x_0-s}^t V(t') \int_{2x_0-t'}^s a\left(\frac{s'+t'}{2}\right) ds' dt' = \int_{2x_0-s}^t V(t') \int_{2x_0}^{s+t'} a\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau dt' .$$

Da nach Voraussetzung und wegen der Stetigkeit von  $H$  auch die  $U$  und  $V$  in  $s_1$  bzw.  $t_1$  stetig sind, ist der Integrand hier ebenfalls in  $t'=t_1$  stetig, man darf also auch hier nach den üblichen Regeln differenzieren.

Schließlich ist

$$III = \int_{2x_0-s}^t \int_{2x_0-t'}^s a\left(\frac{s'+t'}{2}\right) \cdot H(s', t') ds' dt' ;$$

unter Benutzung der gleichmäßigen Stetigkeit von  $H$  auf  $b_2$  zeigt man hier durch analoge Abschätzungen wie im Falle I die Stetigkeit des Integranden von  $\int \dots dt'$  in  $t'=t_1$ , III ist dort auch nach  $t$  differenzierbar.

Durch Zusammenfassung der für die drei Ableitungen von I, II, III erhaltenen Ausdrücke bekommt man dann <sup>14</sup>

$$(6) \quad H'_t(s_1, t_1) = \int_{2x_0-t_1}^{s_1} a\left(\frac{s'+t_1}{2}\right) G(s', t_1) ds' .$$

Genauso zeigt man die Existenz von  $H'_s(s_1, t_1)$  und die Gültigkeit einer entsprechenden Gleichung

$$(6') \quad H'_s(s_1, t_1) = \int_{2x_0-s_1}^{t_1} a\left(\frac{s_1+t'}{2}\right) G(s_1, t') dt' .$$

Damit können wir jetzt den Beweis von Satz 1.2 vollenden:

Da  $F$  um  $(x_1, y_1)$  jedenfalls stetig ist, ist es dort beschränkt, dasselbe gilt von dem zugehörigen  $G$  um das entsprechende  $(s_1, t_1)$ ; wählen wir also  $x_0 = \frac{s_1+t_1}{2}$ , was nach Satz 1.1 möglich ist, so sind die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes in einer ganzen Umgebung von  $(s_1, t_1)$  erfüllt, sodaß in einer ganzen derartigen Umgebung (6) und (6') gelten.

Da weiter nach Voraussetzung  $a(x)$  in  $x = x_1 = \frac{s_1+t_1}{2}$  stetig ist, zeigt (6), daß auch noch

$$H''_{ts}(s_1, t_1) \text{ existiert} = a\left(\frac{s_1+t_1}{2}\right) G(s_1, t_1) .$$

Wegen  $G = U + V + \frac{1}{4}H$  ist daher  $V$  um  $t_1$  differenzierbar und man hat um  $(s_1, t_1)$

$$G'_t(s, t) = V'(t) + \frac{1}{4}H'_t(s, t)$$

$$G''_{ts}(s, t) = \frac{1}{4}H''_{ts}(s, t) = \frac{1}{4}a\left(\frac{s_1+t_1}{2}\right)G(s_1, t_1) .$$

Die Rechnung Seite 14 unten zeigt <sup>9</sup> nun, daß in  $(x_1, y_1)$

$$F''_{xx} - F''_{yy} = 4G''_{ts}(s_1, t_1) ,$$

sodaß man dort die Gleichung (1) für  $F$  hat, wie behauptet.

Weiteres über verallgemeinerte Lösungen von (1) findet sich im Anhang III, jetzt sollen diese Lösungen zu einem normierten Raum  $\mathcal{F}$  zusammengefaßt werden:

Sei  $g(x)$  eine fest vorgegebenen reellwertige Funktion, die auf  $I$  definiert ist, deren Werte lokal, d.h. auf jedem kompakten Teilintervall  $I_1$  von  $I$ , größer als eine positive Zahl  $\delta_{I_1}$  sind, die aber nicht meßbar oder endlich zu sein braucht ("Normfunktion") <sup>15</sup>; damit werde festgesetzt:

Definition 2:  $\|F(x, y)\|_{\mathcal{F}} := \|F\|_{\mathcal{F}} := \sup_{(x, y) \in P} g(x) \cdot |F(x, y)|$   
(Norm von  $F$ )

$\mathcal{F} := \mathcal{F}(I, a, g) := ( F(x, y) : F \text{ ist verallg. Lö. von (1) \& } \|F\|_{\mathcal{F}} < \infty )$

Für  $F$  aus  $\mathcal{F}$  und reelles  $c$  <sup>16</sup>

$$T_c F(x, y) := F(x, y + c)$$

Es gilt nun

Satz 1.3  $\mathcal{F}$  ist ein Banach-Raum, d.h. ein normierter, vollständiger linearer Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen.

Die  $T_c$  sind lineare Operatoren, die die Norm invariant lassen und die  $\mathcal{F}$  auf sich abbilden. Sie bilden eine der additiven Gruppe der reellen Zahlen isomorphe Gruppe  $\mathcal{G} := (T_c : c \text{ reell}), T_c T_d = T_{c+d}$ .

Beweis: Da  $\|F\|_{\mathcal{F}} = 0$  gleichwertig mit  $F(x, y) \equiv 0$  auf  $P$ , bedeutet  $F_1 = F_2$  in  $\mathcal{F}$  hier  $F_1 = F_2$  auf  $P$ . Man prüft nun sofort nach, daß  $\|F\|_{\mathcal{F}}$  die Normeigenschaften hat

(nämlich  $\|F\|_\varphi > 0$  für  $F \neq 0$ ,  $\|kF\|_\varphi = |k| \cdot \|F\|_\varphi$  für komplexes konstantes  $k$ ,  $\|F_1 + F_2\|_\varphi \leq \|F_1\|_\varphi + \|F_2\|_\varphi$ ), deshalb und wegen der Linearität von (3) ist  $\mathcal{F}$  ein normierter linearer Vektorraum.

(Wegen der über die Normfunktion  $\varphi(x)$  gemachten Voraussetzungen ist übrigens jedes  $F$  aus  $\mathcal{F}$  lokal beschränkt, in diesem Falle folgt aber allein aus der Meßbarkeit von  $F$ , daß es auf  $P$ , ebenso wie  $aF$ , lokal integrierbar ist.)

Hat man nun eine Fundamentalfolge  $(F_v)$  aus  $\mathcal{F}$ , so konvergieren die  $F_v$  auf jedem  $I_1 \times R$  ( $I_1$  kompakt aus  $I$ ) gleichmäßig gegen ein  $F_\infty$  ( $\varphi(x)$  ist dort  $\geq \int_{I_1} > 0$ !), das dort dann ebenfalls beschränkt und meßbar ist; nach den obigen Bemerkungen ist dieses auf  $P$  definierte  $F_\infty$  dort nebst  $aF_\infty$  lokal integrierbar.

$F_\infty$  ist auch im Sinne der Norm Grenzwert der  $F_v$  <sup>17</sup>:

Ist  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so wähle man  $N$  so, daß für  $m, n > N$  gilt

$\|F_m - F_n\|_\varphi < \varepsilon$ . Ist weiter  $(x, y)$  aus  $P$  vorgegeben, so bestimme

man  $n = n(x, y) > N$  so, daß  $|F_\infty(x, y) - F_n(x, y)| \cdot \varphi(x) < \varepsilon$

(die  $F_v$  konvergieren ja überall gegen  $F_\infty$ );

es gilt dann für  $m > N$  und alle  $(x, y)$  aus  $P$

$$\varphi(x) \cdot |F_\infty(x, y) - F_m(x, y)| \leq \varphi(x) \cdot (|F_\infty - F_{n_{x,y}}| + |F_{n_{x,y}} - F_m|) <$$

$$\varepsilon + \|F_m - F_{n_{x,y}}\|_\varphi < 2\varepsilon,$$

$$\text{d.h.} \quad \|F_\infty - F_m\|_\varphi \leq 2\varepsilon.$$

Um nachzuweisen, daß  $F_\infty$  Element von  $\mathcal{F}$  ist (damit ist dann die Vollständigkeit von  $\mathcal{F}$  gezeigt), ist nur noch darzutun, daß das  $F_\infty$  entsprechende  $G_\infty$  einer Gleichung (3) genügt <sup>18</sup>:

Zunächst konvergieren auch die  $G_m(s, t)$  lokal auf  $B$  gleichmäßig gegen das  $F_\infty$  entsprechende  $G_\infty$ , also gilt dasselbe für die  $H_m = aG_m ds dt$  und  $H_\infty$  <sup>19</sup>; somit konvergieren die Funktionen  $W_m(s, t) := U_m(s) + V_m(t)$  ebenfalls lokal gleichmäßig; insbesondere konvergiert also auch

$$W_m(s, t_0) = U_m(s) + V_m(t_0) =: u_m(s) \quad (t_0 \text{ beliebig, fest})$$

gleichmäßig in dem angedeuteten  $s$ -Intervall  $I_1$  von Fig. 8.

Geht man nun von den  $U_m, V_m$  über zu  $u_m, v_m(t) := V_m(t) - V_m(t_0)$ , so ist wieder  $W_m = u_m + v_m$ .

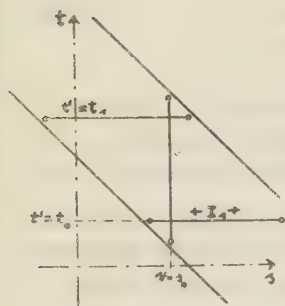


Fig. 8

$W_m$  konvergiert nun auch gleichmäßig auf dem zu  $s_0$  gehörigen  $t$ -Intervall von Fig. 8, d.h. dort konvergiert  $v_m(t)$  gleichmäßig, speziell also auch  $v_m(t_1)$ ; da  $W_m(s, t)$  auf dem zu  $t_1$  gehörigen  $s$ -Intervall von Fig. 8 wieder gleichmäßig konvergiert, konvergiert dort auch  $u_m(s)$  gleichmäßig u.s.w.; auf diese Weise erkennt man, daß die  $u_m$  und  $v_m$  lokal auf  $R$  gleichmäßig gegen  $u_\infty$  und  $v_\infty$  konvergieren, die  $W_m$  konvergieren also gegen ein  $W_\infty$ , das von der Form  $u_\infty(s) + v_\infty(t)$  ist.

Der Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  in (3) für die  $G_m$  liefert daher <sup>19</sup>

$$G_\infty(s, t) = u_\infty(s) + v_\infty(t) + \frac{1}{4} \iint a \cdot G_\infty ds dt'$$

mit Definition 1 entsprechenden  $u, v, G$ , d.h.  $F_\infty$  ist aus  $\mathcal{L}$ .

Die übrigen Behauptungen von Satz 1.3 sind trivial, lediglich daß  $T_c F$  wieder aus  $\mathcal{L}$  ist, ist nicht sofort ersichtlich:

Wir haben hier zu beweisen, daß das  $T_c F$  entsprechende

$${}_c T G(s, t) := F\left(\frac{s+t}{2}, -\frac{s+t}{2} + c\right) = G(s-c, t+c)$$

wieder einer Gleichung der Form (3) genügt. Führt man nun in (3) die Substitution  ${}_c T: (s, t) \rightarrow (s-c, t+c)$  durch, (B geht dabei in sich über), so erhält man

$$G(s-c, t+c) = U(s-c) + V(t+c) + \frac{1}{4} \iint_{b(s-c, t+c)} a\left(\frac{s'+t'}{2}\right) G(s', t') ds dt' ;$$

da eine einfache Substitution zeigt, daß

$$(7) \quad \iint_{b(s-c, t+c)} K(s', t') ds' dt' = \iint_{b(s, t)} K(s'-c, t'+c) ds' dt'$$

hat man

$${}_c T G(s, t) = U(s-c) + V(t+c) + \frac{1}{4} \iint_{b(s, t)} a\left(\frac{s'+t'}{2}\right) {}_c T G(s', t') ds dt'$$

q.e.d.

$\mathcal{L}$  ist übrigens auch noch gegenüber der Spiegelung  $S$ ,  $(SF)(x, y) := F(x, -y)$  invariant, also gegenüber der von  $q$  und  $S$  erzeugten, nicht-abelschen Gruppe  $q^S = q \circ S q$ , deren Schranke ebenfalls 1 ist.

## § 2 Fastperiodische Lösungen

Hat man einen Banach-Raum  $\mathcal{X}$  und eine Gruppe  $\mathcal{G}$  linearer Operatoren, die auf  $\mathcal{X}$  wirken, so ist erklärt, wann ein Element  $F$  aus  $\mathcal{X}$  fastperiodisch heißt (vgl. z.B. Maak (10)):

Definition 3 : Ein  $F$  aus  $\mathcal{X}$  heißt fastperiodisch, wenn es zu jedem positiven  $\varepsilon$  eine endliche Überdeckung der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  gibt,  $\mathbb{R} = \bigcup_{\nu=1}^m A_\nu$ , sodaß immer dann, wenn  $c, d$  aus demselben  $A_\nu$  sind,  $\|T_c F - T_d F\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon$ .

$\mathcal{f}$  sei die Menge aller fastperiodischen Vektoren von  $\mathcal{X}$ .

Statt, " $F$  ist Element von  $\mathcal{f}$ " sagen wir auch " $F$  ist fastperiodische (verallgemeinerte) Lösung von (1)".

$\mathcal{f}$  ist dann ein abgeschlossener, linearer, gegenüber  $\mathcal{G}$  invarianter Unterraum von  $\mathcal{X}$  (vgl. Maak (10)).

Die in " $F$  aus  $\mathcal{f}$ " steckende Voraussetzung  $\|F\|_{\mathcal{X}} < \infty$  ist nun infolge der Fastperiodizität der  $F$  weitgehend von selbst erfüllt; dies ist der Inhalt des folgenden Satzes

Satz 2.1 Eine verallgemeinerte Lösung  $F(x, y)$  von (1) ist genau dann fastperiodisches Element von  $\mathcal{X}$ , wenn

- a) ein  $y_0$  existiert, sodaß  $\sup_{x \in I} |\zeta(x) F(x, y_0)| < \infty$  und
- b) zu jedem positiven  $\varepsilon$  eine endliche Überdeckung  $\bigcup_{\nu=1}^m A_\nu$  von  $\mathbb{R}$  vorhanden ist, sodaß für  $c, d \in A_\nu$  stets  $\|T_c F - T_d F\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon$ .

Beweis: Daß a) und b) notwendig für  $F$  aus  $\mathcal{f}$  sind, ist klar; diese Bedingungen sind hinreichend, wenn man gezeigt hat, daß aus a) und b)  $\|F\|_{\mathcal{X}} < \infty$  folgt.

Wir beweisen dazu zunächst einen allgemeineren Hilfsatz:

Hilfssatz: Ist  $f(u, v)$  eine auf  $M \times G$  definierte Funktion mit Werten in einem Banach-Raum  $E$ , wo  $M$  irgend eine Menge und  $G$  eine zusammenhängende topologische Gruppe ist, ist weiter  $f(u, v)$ , gleichgradig in  $u$  aus  $M$ , in  $v$  fastperiodisch (im v. Neumannschen Sinne)<sup>20</sup>, ist  $f(u, v)$  für jedes feste  $u$  aus  $M$  in  $v$  überall stetig, und gibt es ein  $v_0$  aus  $G$ , so daß  $\sup_{u \in M} \|f(u, v_0)\| = c_0 < \infty$ , so ist auch  $\sup_{u \in M, v \in G} \|f(u, v)\| = c < \infty$   
 ( $\|\dots\|$  bezeichnet die Norm in  $E$ ).

Setzt man hier  $f(u, v) := \varphi(u) \cdot F(u, v)$ ,  $M := I$ ,  $G := R$ ,  $E :=$  Körper der komplexen Zahlen mit dem üblichen Absolutbetrag als Norm,  $v_0 := y_0$ , so sind die Voraussetzungen dieses Hilfssatzes im Falle von Satz 2.1 alle erfüllt (wegen der  $v$ -Stetigkeit vgl. die Bemerkungen im Anschluß an Satz 2.2); die Behauptung des Hilfssatzes besagt dann aber gerade, daß  $\|F\|_c < \infty$ . Es ist also nur noch der Hilfssatz zu beweisen:

Sei  $A_1, \dots, A_m$  eine zu einem festen  $\varepsilon$  (z.B.  $\varepsilon_0 = 1$ ) gehörige Überdeckung von  $G$  für  $f$ , die für alle  $u$  aus  $M$  verwendbar ist; sei weiter  $u$  beliebig, aber fest aus  $M$  gewählt. Dann ist zunächst für alle  $v$ , die mit  $v_0$  in demselben  $A_{l_0}$  liegen,  

$$\|f(u, v)\| \leq c_0 + \varepsilon.$$

Ist  $A_{l_0} \neq G$ , so hat  $A_{l_0}$  einen Randpunkt  $v_1$  (weil  $G$  zusammenhängend vorausgesetzt wurde), der dann gleichzeitig Randpunkt von mindestens einem  $A_{l_1}$  ist. Wegen der  $v$ -Stetigkeit von  $f$  ist nun auch  $\|f(u, v_1)\| \leq c_0 + \varepsilon$ , somit gilt für solche  $v$  aus  $A_{l_1}$ , die hinreichend nahe bei  $v_1$  liegen, jedenfalls  

$$\|f(u, v)\| \leq c_0 + \varepsilon_0 + \eta,$$
 also für alle  $v$  aus  $A_{l_1} \cup A_{l_0}$   

$$\|f(u, v)\| \leq c_0 + 2\varepsilon_0,$$

denn  $\eta$  kann hierbei beliebig positiv gewählt werden. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise (vollständige Induktion) erhält man so

$$\|f(u, v)\| \leq c_0 + n\varepsilon_0.$$

Da  $u$  dabei beliebig war, ist  $c \leq c_0 + n\varepsilon_0 < \infty$ .

q.e.d.

Nur eine andere Formulierung der Definition 3 ist

Satz 2.2 Ein  $F$  aus  $\mathcal{L}$  ist genau dann fastperiodisch, wenn die Menge  $qF$  totalbeschränkt oder, was hier gleichwertig, bedingt kompakt in  $\mathcal{L}$  ist.

(Wegen der hier vorkommenden Begriffe vgl. Maak (9), S. 150.)

Eine Charakterisierung der fastperiodischen Elemente von  $\mathcal{L}$  mittels Translationseigenschaften wird in § 4 (Satz 4.2) gegeben werden; auch die Stetigkeitseigenschaften solcher  $F$  können erst später (Satz 4.1) mittels des Approximationsatzes abgeleitet werden, hier soll nur soviel bemerkt werden: Gemäß der Darstellung (3) von  $G(s,t)$  ist  $G(x-y, x+y)$  bei festem  $x$  bzw.  $y$  stets meßbar, also auch  $F(x,y)$ <sup>21</sup>; ist  $F$  fastperiodischer Vektor, so ist  $F$  bei festem  $x$  im v. Neumannschen Sinne fastperiodische Funktion von  $y$ , die meßbar ist; nach Maak (9), S.86, Satz 2 ist  $F$  dann in  $y$  stetig (sogar gleichmäßig stetig).

Um später eine Verbindung zu den von Levitan (8) und Marcenko (13) betrachteten fastperiodischen Funktionen herstellen zu können, setzen wir noch fest

Definition 4: Ein  $F$  aus  $\mathcal{L}$  heißt gerade, falls für  $x$  aus  $I$  und  $y$  aus  $R$  stets  $F(x,y) = F(x,-y)$ .  
 $\mathcal{f}_0 := \{ F : F \text{ gerade f.p. aus } \mathcal{f} \}.$

$\mathcal{f}_0$  ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von  $\mathcal{f}$  (oder  $\mathcal{L}$ ), der jedoch nicht invariant gegenüber  $\mathcal{G}$  ist<sup>22</sup>.

Wie Satz 2.3 zeigt, sind die Elemente von  $\mathcal{f}_0$ , grob gesprochen, diejenigen verallgemeinerten fastperiodischen Lösungen von (1), für die  $F'_y(x,0) \equiv 0$ :

Satz 2.3 Ist  $F$  gerade und existiert  $F'_y$  im Punkt  $(x_1, 0)$ , so ist  $F'_y(x_1, 0) = 0$ .<sup>23</sup>

Beweis: Aus  $F(x,y) = F(x,-y)$  folgt  $F'_y(x_1, 0) = -F'_y(x_1, 0)$ .

Die zu geradem  $F$  gehörige Gleichung (3) hat eine spezielle Form, durch die umgekehrt auch gerade  $F$  charakterisiert sind:

Satz 2.4 Ein  $F$  aus  $\mathcal{F}$  ist genau dann gerade, wenn das zugehörige  $G$  einer Gleichung (3) mit  $U(s) = V(s)$  genügt.

Der Beweis dazu wird in Anhang III, 8) erbracht werden.

Jedem  $F \in \mathcal{F}$  kann man nun in natürlicher Weise durch die Zuordnung  $Q$

$$(8) \quad F \rightarrow F_0 = QF := \frac{1}{2}(F + SF) = \frac{1}{2}(F(x,y) + F(x,-y))$$

ein gerades  $F_0$  zuordnen, das wegen der Bemerkung am Schluß von § 1 wieder in  $\mathcal{F}$  liegt.

Satz 2.5 Die Zuordnung (8) ist eine Projektion von  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{F}_0$ .

Zum Beweis ist nur noch zu zeigen, daß  $QF$  mit  $F$  fastperiodisch ist.  $SF$  ist es aber jedenfalls ( $-A_1, \dots, -A_m$  bildet nämlich eine  $\epsilon$ -Teilung für  $SF$ ), also auch  $\frac{1}{2}(F+SF)$ .

Gerade fastperiodische  $F$  sind auch bezüglich  $g^S = g \circ Sg$  fastperiodisch ( $A_1, \dots, A_m, SA_1 = -A_1, \dots, SA_m$  ist z.B. eine Teilung zu  $\epsilon$ ,  $F, g^S$ , wenn  $A_1, \dots, A_m$  eine zu  $\epsilon, F, g$  ist), wegen  $\|S\| = 1$  gilt dies auch für beliebige fastperiodische  $F$  von  $f^{24}$ , man kann sich also stets auf  $g$  beschränken.

§ 3

Der Approximationssatz

Für fastperiodische Vektoren eines Banach-Raumes  $E$  mit der Transformationsgruppe  $G$  gilt nach Maak (10), § 1 und § 2 ein Approximationssatz, der besagt, daß der Raum der fastperiodischen Elemente von  $E$  gleich der abgeschlossenen Hülle des von allen endlich-dimensionalen, gegenüber  $G$  invarianten, irreduziblen Teilräumen aufgespannten linearen Raumes ist.

Wir wollen diesen Satz hier anwenden und bestimmen deshalb zunächst einmal die endlich-dimensionalen, irreduziblen, invarianten Unterräume von  $\mathcal{E}$  bezüglich  $\mathcal{G}$ :

Jeder solche Unterraum definiert eine irreduzible Darstellung von  $\mathcal{G}$ , die nach dem Schurschen Lemma (Maak (9), § 5), da  $\mathcal{G}$  abelsch ist, eindimensional ist, d.h. die endlich-dimensionalen invarianten irreduziblen Unterräume von  $\mathcal{E}$  werden jeweils von einem einzigen  $F$  aufgespannt, das dann wegen der Invarianz einer Gleichung der Form

$$(9) \quad T_c F(x, y) = k(c) \cdot F(x, y) \quad T_c \text{ aus } \mathcal{G}$$

$$\text{oder} \quad F(x, y+c) = k(c) \cdot F(x, y) \quad \text{für } x \in I; y, c \in R$$

genügen muß. Eine verallgemeinerte Lösung von (1), die (9) erfüllt, möge "elementar" genannt werden, ihre Bestimmung wird durch Satz 3.1 und 3.2 erledigt:

Satz 3.1 Eine Funktion  $F(x, y)$  ist genau dann elementare verallgemeinerte Lösung von (1), wenn sie von der Form

$$(10) \quad F(x, y) = h_1(x) \cdot e^{ly}$$

ist, wo  $l$  beliebig komplex und  $h_1(x)$  auf  $I$  eine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$(11) \quad h_1''(x) - h_1(x) \cdot (a(x) + l^2) = 0$$

ist, d.h. (vgl. Anhang II)  $h_1(x)$  ist auf  $I$  einmal stetig differenzierbar,  $h_1'$  ist dort lokal totalstetig und  $h_1$  genügt f.ü. (11) <sup>25</sup>.

Hierzu ist zu bemerken, daß aus der Totalstetigkeit von  $h_1'$  die Existenz von  $h_1''$  f.ü. auf I folgt; aus (11) folgt, daß an Stetigkeitsstellen von  $a(x)$   $h_1''$  existiert und durch (11) gegeben ist (Anhang II, 1)).

Für stetige  $a(x)$  ist ein  $F$  also elementar, wenn es von der Form (10) mit zweimal stetig differenzierbarem  $h$  ist, das (11) auf I genügt.

Beweis: Das einem  $F$  der Form (10) zugeordnete  $G$  genügt f.ü. auf B der Gleichung (2)  $G''_{st} = \frac{1}{4}aG$ , wie man sofort nachrechnet. Genauso wie beim Beweis des ersten Teils von Satz 1.2 folgert man daraus durch Integration (3) (die Formel  $\int_{s_1}^{s_2} f'(s)ds = f(s_2) - f(s_1)$  kann dabei wie dort angewendet werden, da  $G'_t$  in  $s$  mit  $h_1$  lokal totalstetig ist, vgl. Anhang I, 3)). Außerdem genügt ein solches  $F$  offenbar (9).

Sei nun umgekehrt  $F \neq 0$  verallgemeinerte Lösung von (1), die (9) erfüllt; dann ist jedenfalls (vgl. die Bemerkung im Anschluß an Satz 2.2)  $k(c)$  meßbar und lokal integrierbar, außerdem folgt für  $k(c)$  aus (9)  $k(c+d) = k(c) + k(d)$ . Solche Funktionen haben aber (vgl. Anhang I, 4)) die Form  $e^{lc}$  mit komplexem  $l$ , sodaß man  $F(x, y+c) = F(x, y) \cdot e^{lc}$  hat. Für  $y=0$  und  $c=y$  erhält man daraus

$$F(x, y) = F(x, 0) \cdot e^{ly} =: h_1(x) \cdot e^{ly}$$

mit meßbarem, lokal integrierbarem  $h_1(x)$ .

Zur Bestimmung von  $h_1$  - wir schreiben dafür i.f. kurz  $h$  - gehen wir in (3) ein: Das zu  $F$  gehörige  $G$  hat die Form

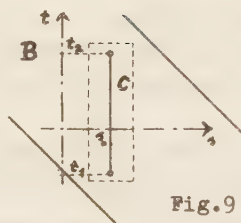
$$(12) \quad G(s, t) = h\left(\frac{s+t}{2}\right) \cdot \exp\left(l \cdot \frac{-s+t}{2}\right) \quad (\exp(z) =: e^z),$$

also wird (3) zu

$$(13) \quad h\left(\frac{s+t}{2}\right) \cdot \exp\left(l \cdot \frac{-s+t}{2}\right) = U(s) + V(t) + \frac{1}{4} \iint_{B(s,t)} a\left(\frac{s'+t'}{2}\right) G(s', t') ds' dt' \\ = U + V + \frac{1}{4} H \quad (H(s, t))$$

Zunächst soll nun gezeigt werden, daß die Funktionen  $U, V, G, h$  stetig sind.

Sei  $s_0$  beliebig reell; wir wählen dazu ein  $t$ -Intervall  $I_1$ ,  $I_1 = [t_1, t_2]$  so, daß die Strecke  $(s_0) \times I_1$  vom Rand des Streifens  $B$  positiven Abstand hat (Fig. 9);



integriert man (13) über  $I_1$ , so erhält man

$$e^{-ls} \int_{I_1} \exp(l \cdot \frac{s+t}{2}) \cdot h(\frac{s+t}{2}) dt = (t_2 - t_1) U(s) + \int_{I_1} V(t) dt + \frac{1}{4} \int_{I_1} H(s, t) dt$$

Fig. 9 oder, wenn man links  $s+t=r$  setzt,

$$(14) \quad e^{-ls} \int_{t_1+s}^{t_2+s} e^{-lr/2} h(\frac{r}{2}) dr = (t_2 - t_1) U(s) + \int_{I_1} V(t) dt + \frac{1}{4} \int_{I_1} H(s, t) dt.$$

$H(s, t)$  ist auf  $B$  stetig, also ist das letzte Glied rechts bei  $s_0$  stetig, daher ist nach (14), da die linke Seite bei  $s_0$  ebenfalls stetig ist, auch  $U(s)$  in  $s_0$  stetig;  $s_0$  war beliebig, somit ist  $U(s)$  überall stetig. Genauso erschließt man die Stetigkeit von  $V(t)$  und damit auch die von  $G(s, t)$  auf ihren Definitionsbereichen. Nach (12) ist damit aber auch  $h(x)$  auf  $I$  stetig.

Die Funktionen  $U$ ,  $V$ ,  $G$  und  $h$  sind auf ihren Definitionsbereichen einmal stetig differenzierbar:

Das Argument des Integrals auf der linken Seite von (14) ist stetig, also ist das Integral und damit die ganze linke Seite von (14) um  $s_0$  nach  $s$  differenzierbar ( $s_0$  und  $I_1$  wieder wie oben gewählt); aus der Stetigkeit von  $G(s, t)$  folgt weiter, daß  $G(s, t)$  lokal beschränkt ist, sodaß der beim Beweis von Satz 1.2 formulierte Hilfssatz überall auf  $B$  anwendbar ist:  $H(s, t)$  ist überall auf  $B$  nach  $s$  differenzierbar, nach Gleichung (6') ist  $H'_s$  auch noch stetig<sup>26</sup>. Nach bekannten Sätzen über die Differentiation von Parameterintegralen (vgl. z.B. v. Mangoldt-Knopp, Einf. i. d. h. Mathematik, III (6. Aufl., S. 317)) ist dann das rechte Integral von (14) ebenfalls um  $s_0$  nach  $s$  stetig differenzierbar; also ist nach (14) auch  $U(s)$  um  $s_0$  stetig differenzierbar. Weil  $s_0$  beliebig war, ist  $U(s)$  und genauso auch  $V(t)$  überall auf  $R$  stetig differenzierbar, mit (3) und (12) sind dann auch die Funktionen  $G(s, t)$  und  $h(x)$  auf  $B$  bzw.  $I$  einmal stetig differenzierbar.

Durch Differentiation nach  $s$  erhält man aus (14) um  $s_0$

$$(15) \quad -1 \cdot e^{-ls} \int_{t_1+s}^{t_2+s} e^{lr/2} h\left(\frac{r}{2}\right) dr + e^{-ls} \left( e^{lr/2} h\left(\frac{r}{2}\right) \right)_{r=t_1+s}^{r=t_2+s} =$$

$$= (t_2 - t_1) U'(s) + \frac{1}{4} \int_{I_1} H'_s(s, t) dt.$$

Um nachzuweisen, daß  $U$  und  $V$  zweimal stetig (!) differenzierbar sind, hat man nur das rechte Integral in (15) zu betrachten, das nach (6') - man führt wieder  $r := s + t'$  als neue Integrationsveränderliche ein - die Form hat

$$W(s) := \int_{I_1} H'_s(s, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{2x_0}^{s+t} a\left(\frac{r}{2}\right) G(s, r-s) dr dt.$$

Bei auf  $I$  stetigem  $a(x)$  ist  $W(s)$  (Satz über die Differentiation von Parameterintegralen,  $G$  ist schon als einmal stetig differenzierbar erkannt) sicher stetig differenzierbar, sodaß man hier fertig wäre. Im allgemeinen Fall muß man etwas umständlicher schließen:

Es wird ( $s_0$  beliebig,  $t_1, t_2$  wie oben gewählt,  $s$  hinreichend nahe bei  $s_0$ , sodaß alles noch definiert ist - z.B. so, daß man nicht über das Rechteck  $C$  von Fig. 9 hinauskommt).

$$W(s) - W(s_0) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_{s_0+t}^{s+t} a\left(\frac{r}{2}\right) \cdot (G(s, r-s) - G(s_0, r-s_0)) dr + \right.$$

$$+ \int_{s_0+t}^{s+t} a\left(\frac{r}{2}\right) G(s_0, r-s_0) dr +$$

$$\left. + \int_{2x_0}^{s_0+t} a\left(\frac{r}{2}\right) \cdot (G(s, r-s) - G(s_0, r-s_0)) dr \right\}$$

$$=: \int_{t_1}^{t_2} (X + Y + Z) dt.$$

Für  $\int_{t_1}^{t_2} X dt$  erhält man, wenn man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwendet

$$\int_{t_1}^{t_2} X dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_0+t}^{s+t} a\left(\frac{r}{2}\right) \cdot (s-s_0) (G'_s(s', r-s') - G'_t(s', r-s')) dr dt,$$

wobei  $s' = s'(r)$  stets zwischen  $s_0$  und  $s$  liegt; da  $G'_s$  und  $G'_t$  um  $(s_0) \times I_1$  beschränkt sind (z.B. auf  $C$ ),  $|G'_s|$ ,  $|G'_t| \leq K$ , ist

$$\left| \frac{1}{s-s_0} \int_{t_1}^{t_2} X dt \right| \leq 2K \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_0+t}^{s+t} \left| a\left(\frac{r}{2}\right) \right| dr dt \right|$$

und dieses Integral geht für  $s \rightarrow s_0$  gegen 0, da das Maß des Parallelogrammes  $t_1 \leq t \leq t_2$  in der  $r$ - $t$ -Ebene dann gegen 0 geht.  
 $s_0 + t \leq r \leq s + t$

Eine analoge Anwendung des Mittelwertsatzes liefert unter Ausnutzung der gleichmäßigen Stetigkeit der  $G'_s$  und  $G'_t$  auf  $C$

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{s-s_0} \int_{t_1}^{t_2} X dt \text{ existiert} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{2x_0}^{s+t} a\left(\frac{r}{2}\right) (G'_s(s_0, r-s_0) - G'_t(s_0, r-s_0)) dr dt =: z_0.$$

Für das mittlere Integral erhält man mit Fubini

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} Y dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_0}^s a\left(\frac{s'+t}{2}\right) G(s_0, t+s'-s_0) ds' dt = \\ &= \int_{s_0}^s \int_{t_1}^{t_2} a\left(\frac{s'+t}{2}\right) G(s_0, t+s'-s_0) dt ds' = \\ &= \int_{s_0}^s \int_{t_1+s'}^{t_2+s'} a\left(\frac{r}{2}\right) G(s_0, r-s_0) dr ds' =: \int_{s_0}^s y(s') ds'. \end{aligned}$$

Der Integrand  $y(s')$  ist stetig bei  $s' = s_0$ , also existiert

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{s-s_0} \int_{t_1}^{t_2} Y dt = y(s_0) = \int_{t_1+s_0}^{t_2+s_0} a\left(\frac{r}{2}\right) G(s_0, r-s_0) dr,$$

sodaß schließlich auch  $W(s)$  in  $s_0$  differenzierbar ist und

$$W'(s_0) = y(s_0) + z_0;$$

Da  $s_0$  keinen Einschränkungen unterworfen war, ist  $W(s)$  überall differenzierbar, die Darstellungen für  $y$  und  $z$  zeigen überdies, daß  $W(s)$  sogar stetig differenzierbar ist. Nach (15) ist damit  $U(s)$  und ebenso  $V(t)$  überall zweimal stetig differenzierbar. Weiter ist, wenn man sich auf eine Umgebung des Punktes  $(s, t)$  aus  $B$  beschränkt und  $s=s_0$  fest läßt, gemäß (6')  $H'_s(s_0, t)$  in  $t$  totalstetig und f.ü. nach  $t$  dort differenzierbar<sup>30</sup> (Anhang I, 3), sodaß wegen  $G'_s = U' + \frac{1}{4}H'_s$  dasselbe auch von  $G'_s(s_0, t)$  gilt; nach (12) wird nun

$$h'(\frac{s+t}{2}) = \exp(\frac{1}{2}(s-t)) \cdot (1 \cdot G(s, t) + 2G'_s(s, t)) ,$$

daher ist  $h'(\frac{s+t}{2})$  dort ebenfalls totalstetig und f.ü. nach  $t$  differenzierbar<sup>27</sup>; weil nun  $(s_0, t)$  beliebig aus  $B$  war, folgt, wenn man  $s_0 = 0$  und  $t/2 = x$  setzt, daß  $h'(x)$  auf  $I$  lokal totalstetig und f.ü. differenzierbar ist.

Damit läßt sich nun der Beweis von Satz 3.1 rasch zu Ende führen: Es wird nach (12)

$$G'_s(s, t) = \frac{1}{2} \exp(1 \cdot \frac{-s+t}{2}) \cdot (h'(\frac{s+t}{2}) - 1 \cdot h(\frac{s+t}{2})) ,$$

für  $s=0$  also

$$G'_s(0, t) = \frac{1}{2} e^{1t/2} (h'(\frac{t}{2}) - 1 \cdot h(\frac{t}{2})) \quad \text{für } \frac{t}{2} \in I ,$$

somit f.ü.

$$G''_{st}(0, t) = \frac{1}{4} e^{1t/2} (h''(\frac{t}{2}) - 1^2 h(\frac{t}{2})) .$$

Andererseits ist nach (6') mit Anhang I 3) für  $s=0$ ,  $t$  aus  $2I$

$$G''_{st} = \frac{1}{4} H''_{st} = \frac{1}{4} a(\frac{t}{2}) G(0, t) = \frac{1}{4} a(\frac{t}{2}) e^{1t/2} h(\frac{t}{2}) \quad \text{f.ü. in } t ,$$

sodaß man für  $\frac{t}{2} = x$ ,  $x$  aus  $I$ , bis auf eine Menge vom Maß 0<sup>28</sup>

$$h''(x) = (1^2 + a(x)) \cdot h(x) , \quad \text{d.i. (11),}$$

auf  $I$  hat. Daß in Stetigkeitsstellen von  $a(x)$   $h''(x)$  stets existiert und (11) genügt, wird in Anhang II 1) bewiesen.

q.e.d.

Mit diesem Satz lassen sich nun sofort die invarianten eindimensionalen Moduln von  $\mathcal{F}$  bestimmen:

Satz 3.2 Ein Element  $F$  ist genau dann in  $\mathcal{E}$  & elementar, wenn es die Form

$$(16) \quad F(x, y) = h_{\omega}(x) \cdot e^{i\omega y}$$

hat, wo  $\omega$  beliebig reell ist, wo  $h_{\omega}(x)$  im Sinne von Satz 3.1 Lösung von

$$(17) \quad h_{\omega}''(x) - (a(x) - \omega^2) \cdot h_{\omega}(x) = 0$$

ist und wo zusätzlich noch

$$(18) \quad \sup_{x \in I} |\varphi(x) h_{\omega}(x)| < \infty$$

ist. Ein derartiges  $F$  ist dann auch fastperiodisch aus  $\mathcal{F}$ .

Beweis: Erfüllt  $F$  die obigen Bedingungen, so ist es elementare verallgemeinerte Lösung von (1) (Satz 3.1), außerdem ist dann  $\|F\|_{\mathcal{F}} < \infty$ ;  $F$  ist daher aus  $\mathcal{F}$ . Die Fastperiodizität solcher  $F$  folgt dann aus der  $e^{i\omega y}$ . Ist umgekehrt  $F$  elementar und aus  $\mathcal{F}$ , so hat es nach Satz 3.1 die Form (10); wegen  $\|F\|_{\mathcal{F}} < \infty$  muß dabei zunächst  $l$  rein imaginär  $=: i\omega$  sein, außerdem muß dann auch noch (18) gelten.

Elementare fastperiodische  $F$  aus  $\mathcal{F}$  sind also stetig, einmal stetig differenzierbar und  $(\varphi)$ -gleichgradig in  $x$ , vgl. § 4)  $y$ -periodisch.

Unter einer Funktion  $h_{\omega}(x)$  werde hier und i.f. stets eine Lösung von (17) verstanden, wobei Lösung wie in Satz 3.1 bzw. im Anhang II definiert ist. Für die Lösungsmannigfaltigkeit  $L_{\omega}$  von (17) bei festem  $\omega$  gelten dann, obwohl  $a(x)$  nur als lokal integrabel (und komplexwertig) statt wie gewöhnlich stetig (und reell) vorausgesetzt wurde, die üblichen Sätze (vgl. Anhang II, 2)), insbesondere läßt sich jedes  $h_{\omega}(x)$  eindeutig darstellen in der Form  $h_{\omega} \cdot h_{\omega,1}(x) + h'_{\omega} \cdot h_{\omega,2}(x)$ , wo  $h_{\omega,1}(x)$  zu den Anfangsbedingungen  $h_{\omega,1}(x_0) = 1$ ,  $h'_{\omega,1}(x_0) = 0$  gehört und  $h_{\omega,2}(x)$  die Anfangsbedingungen  $h_{\omega,2}(x_0) = 0$ ,  $h'_{\omega,2}(x_0) = 1$  erfüllt ( $x_0$  beliebig, fest aus I).

Nach diesen Bemerkungen kann man den Approximationssatz für fastperiodische Vektoren aus  $\mathcal{F}$  formulieren:

Satz 3.3

Approximations-  
satz

Jeder abgeschlossene invariante lineare Teilraum  $\mathcal{f}_1$  von  $\mathcal{f}$  wird aufgespannt von den elementaren fastperiodischen  $F(x,y)$  aus  $\mathcal{f}_1$ , d.h. jedes  $F(x,y)$  aus  $\mathcal{f}_1$  ist im Sinne der Norm von  $\mathcal{Z}$  durch endliche Linearkombinationen von Funktionen  $h_\omega(x) \cdot e^{i\omega y}$  aus  $\mathcal{f}_1$  ( $\omega$  reell,  $h_\omega$  wie in Satz 3.2) beliebig genau approximierbar. Ein  $F(x,y)$  ist also genau dann fastperiodischer Vektor aus  $\mathcal{Z}$ , wenn es zu jedem positiven  $\varepsilon$  ein natürliches  $N$ , komplexe Zahlen  $h_m$ ,  $h'_m$  und reelle Zahlen  $\omega_m$  gibt, sodaß

$$(19) \quad \|F(x,y) - \sum_1^N (h_m h_{\omega_m,1}(x) + h'_m h_{\omega_m,2}(x)) e^{i\omega_m y}\|_{\mathcal{Z}} < \varepsilon$$

wobei (für  $m = 1, \dots, N$ )

$$(20) \quad \sup_{x \in I} \varphi(x) \cdot |h_m h_{\omega_m,1}(x) + h'_m h_{\omega_m,2}(x)| < \infty.$$

Der Beweis folgt sofort aus dem zu Beginn dieses Paragraphen erwähnten Approximationssatz in Maak (10), § 2, in Verbindung mit unserem Satz 3.2.

Für gerades  $F$  läßt sich Satz 3.3 etwas verschärfen, dann sind auch die Approximationssummen gerade wählbar, es gilt (19'): Stets ist nämlich  $\|QF\|_{\mathcal{Z}} \leq \|F\|_{\mathcal{Z}}$ , (vgl. § 2, Satz 2,5), also auch

$\|QF - \sum_{\omega} Q(h_\omega(x) e^{i\omega y})\|_{\mathcal{Z}} < \varepsilon$ ; da bei geradem  $F$  nun  $QF = F$  und da  $Q(h_\omega(x) e^{i\omega y}) = h_\omega(x) \cdot \cos \omega y$ , hat man statt (19)

$$(19') \quad \|F(x,y) - \sum_1^N h_{\omega_m}(x) \cdot \cos \omega_m y\|_{\mathcal{Z}} < \varepsilon \text{ mit (18).}$$

Zur Konvergenz in (19) bzw. (19') ist hier zu bemerken, daß sie lokal, also auf jedem abgeschlossenen beschränkten Teilintervall von  $I$ , gleichmäßig erfolgt, da dort die Normfunktion  $\varphi(x)$  nach Voraussetzung von 0 einen positiven Abstand hat.

Erläuternde Beispiele zu Satz 3.3 werden in § 6 angegeben werden, jetzt soll noch etwas näher auf die Rolle von  $\varphi(x)$  eingegangen werden:

Die Normfunktion  $\varphi(x)$  bestimmt den Umfang von  $\mathcal{f}$ ; sie kann so gewählt werden, daß (18) für kein  $\omega$  erfüllbar ist, dann ist  $\mathcal{f} = (0)$ ; es ist der Fall denkbar, daß (18) nur für

gewisse  $\omega$  befriedigt werden kann, für andere nicht, und wenn es zu  $\omega$  ein  $h_\omega(x)$  das (18) genügt, gibt, so ist es möglich, daß die Teilmannigfaltigkeit von  $L_\omega$ , die (18) erfüllt (sie ist stets ein linearer Teilraum von  $L_\omega$ ) nur die Dimension 1 hat.

Man kann nun  $g(x)$  so wählen, daß jedenfalls alle überhaupt in Frage kommenden elementaren  $F(x,y)$  erfaßt werden (bei diesem  $g$  gibt es also stets fastperiodische Vektoren  $\neq 0$  aus  $\mathcal{E}$ ):

Satz 3.4 Zu gegebenem  $a(x)$  gibt es eine, von  $\omega$  unabhängige Normfunktion  $g_1(x) \leq 1$ , sodaß (18) für alle Lösungen von (17) bei beliebigem reellem  $\omega$  erfüllt ist.

Der Beweis findet sich im Anhang II, 3).

Geht man von einem derartigen  $g_1$  <sup>29</sup> zu noch kleineren  $g(x)$  über - entscheidend sind nur die Wachstumsverhältnisse an den Intervallenden - so vergrößert sich  $f$  nur mehr wegen der Abschwächung der Konvergenz in (19), stets hat man dabei aber auf kompakten Teilintervallen von  $I$  gleichmäßige Konvergenz der approximierenden Summen gegen  $F$  in (19).

Geht man zu größeren  $g(x)$  über, so wird  $f$  eingeschränkt, wird  $g(x)$  z.B. bei  $x_v \in I$  oder  $\epsilon \in \bar{I}$  (Indexmenge  $I$  der  $v$  endlich oder unendlich) unendlich, so umfaßt das zugehörige  $f$  alle die fastperiodischen  $F(x,y)$ , die auf den Geraden  $x = x_v$  mit vorgeschriebener Ordnung identisch verschwinden <sup>30</sup>.

Man kann dabei nicht erwarten, daß es ein universelles  $g(x)$  gibt, das alle fastperiodischen verallgemeinerten Lösungen von (1) erfaßt, d.h. alle  $f$  zu allen möglichen  $g$  umfaßt, wie dies für die elementaren  $F(x,y)$  nach Satz 3.4 möglich ist.

Welches  $g$  man nun im Einzelfalle wählt, hängt von der Art der gewünschten Konvergenz ab ( $g(x) \equiv 1$  liefert z.B. gleichmäßige Konvergenz auf  $I$ ) sowie davon, wieviele elementare fastperiodische Funktionen, also i.w. Lösungen von (17), man für die Approximation zulassen will (vgl. hierzu die Beispiele in § 6).

Auf die genauere Abhängigkeit der Räume  $\mathcal{E}$  und  $f$  von  $g(x)$  soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden.

#### § 4 Einige Eigenschaften fastperiodischer Lösungen

Satz 4.1 Jedes fastperiodische  $F(x,y)$  aus  $\mathcal{f}$  ist auf  $P$  stetig; jedes solche  $F$  ist in  $y$  gleichmäßig stetig, und zwar  $\varphi$ -gleichgradig auf  $I$ , d.h. zu jedem positiven  $\epsilon$  gibt es ein positives  $\delta$ , sodaß für alle reellen  $y_1, y_2$ , für die  $|y_1 - y_2| < \delta$  und alle  $x$  aus  $I$  gilt

$$\varphi(x) \cdot |F(x, y_1) - F(x, y_2)| < \epsilon. \quad 31$$

Ist  $a(x)$  über  $I$  integrierbar oder auf  $I$  beschränkt, und hat  $\varphi(x)$  auf  $I$  von 0 einen positiven Abstand, so ist ein fastperiodisches  $F(x,y)$  sogar gleichmäßig stetig auf  $P$ , d.h. zu jedem positiven  $\epsilon$  gibt es ein positives  $\delta$ , sodaß, falls nur  $|x_1 - x_2| < \delta$  und  $|y_1 - y_2| < \delta$ , sowie  $(x_v, y_v)$  aus  $P$ ,

$$|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \epsilon.$$

Schon die punktweise Stetigkeit ist für allgemeine  $F$  aus  $\mathcal{f}$  i.a. nicht erfüllt <sup>31</sup>, erst recht nicht gelten die verschiedenen Arten der gleichmäßigen bzw. gleichgradigen Stetigkeit allgemein in  $\mathcal{f}$ .

Da auf jedem kompakten Teilintervall  $I_1$  von  $I$   $\int_{I_1} |a(x)| dx < \infty$  und  $\varphi(x) \geq \delta_{I_1} > 0$  ist, ist auf dem dazugehörigen  $I_1$  Streifen  $I_1 \times \mathbb{R}$  ein <sup>1</sup> fastperiodisches  $F(x,y)$  stets gleichmäßig stetig.

Beweis <sup>32</sup>: Nach Satz 3.1 sind die elementaren  $F$  stetig auf  $P$ , nach Satz 3.3 und weil die Approximation durch elementare  $F$  lokal gleichmäßig ist, sind dann auch beliebige fastperiodische  $F$  aus  $\mathcal{f}$  stetig auf  $P$ . Analog zeigt man die Richtigkeit der zweiten Aussage von Satz 4.1, da elementare fastperiodische  $F$  diese Eigenschaft haben.

Was die letzte Aussage betrifft, so genügt es wegen Satz 3.3 und der über  $\varphi(x)$  gemachten Voraussetzung, sie für elementare fastperiodische Vektoren nachzuweisen; solche  $F$  sind aber

genau dann gleichmäßig auf  $P$  stetig, wenn das zugehörige  $h(x)$  auf  $I$  gleichmäßig stetig ist. Dies folgt aber, da wegen  $\varphi \geq \delta_0 > 0$  und  $\sup_I |h| < \infty$   $h(x)$  auf  $I$  beschränkt ist, aus dem folgenden

Hilfssatz: Ist  $h(x)$  eine auf  $I$  beschränkte Lösung von

$$h''(x) = b(x) \cdot h(x),$$

wo  $b(x)$  auf  $I$  meßbar und beschränkt oder über  $I$  integrierbar ist, so ist auch  $h'(x)$  auf  $I$  beschränkt.

Der Beweis wird in Anhang II, 4) erbracht werden.

Satz 4.2 Ein  $F$  aus  $\mathcal{F}^{33}$  ist genau dann fastperiodisch, wenn es

a)  $y$ -stetig ist, und zwar  $\varphi$ -gleichgradig in  $x$ , d.h. zu jedem reellen  $y_1$  und positiven  $\varepsilon$  gibt es ein positives  $\delta$ , sodaß, falls  $|y - y_1| < \delta$ , für alle  $x \in I$

$$\varphi(x) \cdot |F(x, y) - F(x, y_1)| < \varepsilon \quad 85$$

und

b) wenn es zu jedem positiven  $\varepsilon$  eine relativ dichte Menge  $T$  von  $\varepsilon$ -Translationszahlen  $\tau$  für  $F$  gibt, die  $\varphi$ -gleichgradig in  $x$  aus  $I$  gelten, d.h. zu jedem positiven  $\varepsilon$  gibt es eine relativ dichte Menge  $T$  reeller Zahlen  $\tau$ , sodaß für beliebiges  $\tau$  aus  $T$ ,  $x$  aus  $I$ ,  $y$  aus  $R$  gilt

$$\varphi(x) \cdot |F(x, y) - F(x, y + \tau)| < \varepsilon. \quad 82$$

$T$  heißt dabei relativ dicht, wenn es eine reelle Zahl  $L$  gibt, sodaß in jedem reellen Intervall der Länge  $L$  mindestens eine Zahl  $\tau$  aus  $T$  liegt (vgl. Maak (9), S. 92).

Ist  $I$  kompakt, so ist a) ersetzbar durch

a')  $F(x, y)$  ist auf  $P$  stetig

Beweis: Daß a) und b) notwendig sind, folgt aus Satz 4.1 und dem Approximationssatz 3.3, denn elementare  $F$  sind sogar (gleichgradig in  $x$ ) periodisch in  $y$ .

Um das Umgekehrte einzusehen, soll zunächst ein allgemeiner Satz in dieser Richtung bewiesen werden:

Seien  $G$  und  $E$  zwei topologische abelsche Gruppen <sup>34</sup>,  $f(y)$  eine Funktion auf  $G$  mit Werten in  $E$ . Eine Teilmenge  $T$  von  $G$  heiße relativ dicht, wenn es eine kompakte Menge  $L$  aus  $G$  gibt, so-  
daß für alle  $y$  aus  $G$  die Menge  $y+L$  mit  $T$  nicht-leeren Durch-  
schnitt hat (im Falle  $G = \mathbb{R}$  = additive Gruppe der reellen Zah-  
len stimmt dies mit der früheren Festsetzung überein; allge-  
mein ist damit gleichwertig: Es gibt eine kompakte Menge  $K$ ,  
sodaß  $K+T=G$ ). Weiter werde  $\tau$  Translationszahl für  $f$  zur Um-  
gebung  $U$ ,  $0 \in U \subset E$ , genannt, wenn für alle  $y$  aus  $G$

$$f(y) - f(y+\tau) \in U.$$

Damit gilt der

Satz: Ist  $f(y)$  stetig, so ist  $f$  genau dann fastperiodisch  
(im v. Neumannschen Sinne), wenn es zu jeder Umgebung  
der  $0$  in  $E$  eine relativ dichte Menge  $T$  von Transla-  
tionszahlen für  $f$  gibt.

Hier soll nur der für den Beweis von Satz 4.2 benötigte Teil  
bewiesen werden.

Sei also  $f(y)$  stetig und besitze zu allen Umgebungen  $U$  von  
 $0$  aus  $E$  Translationszahlen  $\tau$ , die relativ dicht in  $G$  liegen.  
Dann ist  $f(y)$  zunächst auf  $G$  gleichmäßig stetig:  
Ist  $U$  als Umgebung der  $0$  in  $E$  vorgegeben, so wähle man  $U'$  so,  
daß  $U' + U' + U' \subset U$  und  $U' = -U'$ ;  $T$  sei die relativ dichte Men-  
ge der Translationszahlen von  $f$  zu  $U'$ ,  $L$  die dazugehörige kom-  
pakte Menge aus  $G$ . Wegen der Stetigkeit von  $f(y)$  auf  $-L$  und  
weil  $-L$  ebenfalls kompakt ist, gibt es dann eine Umgebung  $V$   
der  $0$  aus  $G$ , sodaß für alle  $l$  aus  $L$  und alle <sup>35</sup>  $v$  aus  $V$

$$f(-l+v) - f(-l) \in U'.$$

Sei nun  $y$  beliebig aus  $G$ ;  $\tau$  aus  $T$  und  $l$  aus  $L$  werden dazu so  
bestimmt, daß  $y+l=\tau$ . Dann gilt für beliebige  $v$  aus  $V$

$$\begin{aligned} f(y+v) &= f(\tau-l+v) = f(-l+v) + u' = f(-l) + u' + u'' = \\ &= f(\tau-l) + u' + u'' + u''' = f(y) + u \end{aligned}$$

mit passenden  $u', u'', u'''$  aus  $U'$ ,  $u$  aus  $U$ .

Dies ist aber genau die gleichmäßige Stetigkeit von  $f$ .

Um die Fastperiodizität von  $f(y)$  nachzuweisen, geben wir bei vorgegebener Umgebung  $U$  der  $0$  in  $E$  eine dazu passende Teilung  $A_1, \dots, A_m$  von  $G$  für  $f$  an:

Sei  $U'$  wieder wie oben gewählt, ebenso  $T$  und  $L$ ; auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  kann man dann weiter eine Umgebung  $V$  der  $0$  in  $G$  so wählen, daß für alle  $z$  aus  $G$  und alle  $v$  aus  $V$  gilt  $f(z+v) - f(z) \in U'$ . Außerdem kann  $-L$  so in endlich viele Teilmengen  $-L_1, \dots, -L_m$  zerlegt werden, daß sich irgend zwei Elemente aus einem  $-L_v$  nur um ein Element aus  $V$  unterscheiden; damit setzen wir fest

$$A_v := -L_v + T \quad (v = 1, \dots, m).$$

Die  $A_v$  überdecken  $G$ : Ist  $y$  aus  $G$ , so gilt  $y + l = \tau$  mit passendem  $\tau$  aus  $T$  und  $l$  aus  $L$ ; da dieses  $l$  aus einem  $L_v$  ist, hat man  $y = -l + \tau \in -L_v + T = A_v$ .

Die  $A_v$  bilden eine Teilung für  $f$  zu  $U$ : Ist  $c$  beliebig aus  $G$ , und sind  $x, y$  aus einem  $A_v$ , so wird

$$\begin{aligned} f(x+c) - f(y+c) &= f(-l_{x,v} + \tau_x + c) - f(-l_{y,v} + \tau_y + c) = \\ &= f(-l_{x,v} + c) + u' - (f(-l_{y,v} + c) + u'') = \\ &= u' - u'' + u''' \in U, \end{aligned}$$

da sich  $-l_{x,v} + c$  und  $-l_{y,v} + c$  nur um ein  $v$  aus  $V$  unterscheiden, sodaß sich nach Wahl von  $V$  die Funktionswerte von  $f$  dort nur um ein  $u'''$  aus  $U'$  unterscheiden.

Mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes kann man nun die zweite Behauptung von Satz 4.2 zeigen. Dazu setzen wir <sup>85</sup>

$G := \mathbb{R}$  (additive Gruppe der reellen Zahlen mit der üblichen Topologie)

$E :=$  Menge aller komplexwertigen  $\varphi(x)$ , die auf  $I$  definiert sind und für die  $\|\varphi\| := \sup_{x \in I} |\varphi(x)| < \infty$ ; diese Menge wird durch  $\|\varphi\|_\infty$  und das übliche  $+$  zu einer topologischen abelschen Gruppe.

$$f(y) := F(x, y).$$

$f(y)$  ist dann eine Abbildung von  $G$  in  $E$  (da  $F$  aus  $\mathcal{E}$ , ist  $|f(y)|_\infty$  stets endlich <sup>33</sup>); man prüft leicht nach, daß  $f$  stetig

ist (Bedingung a)), sowie daß es stets relativ dicht liegende Translationszahlen besitzt, sodaß  $f$  also fastperiodisch ist. Die Fastperiodizität von  $f(y)$  gibt aber genau die von  $F(x,y)$  im früher (§ 2) definierten Sinne.

§ 5

Fourierreihen

Hat man allgemein eine Funktion  $f(t)$  auf einer Gruppe mit Werten in einem Banach-Raum  $E$ , die fastperiodisch ist, so ist  $f(t)$  ergodisch, d.h. es besitzt einen Mittelwert mit den üblichen Eigenschaften (vgl. Maak (10), § 1); allgemeiner gilt dies auch von allen Funktionen der Form  $f(t) \cdot \overline{a_{ij}}(t)$ , wo  $f(t)$  fastperiodisch auf  $G$  und  $(a_{ij}(t))$  eine endlich-dimensionale beschränkte Darstellung von  $G$  ist, da dann auch diese Ausdrücke fastperiodisch sind. Über diesen abstrakten Mittelwert  $M_t(f(t) \cdot \overline{a_{ij}}(t)) =: A_{ij}$ , der Element von  $E$  ist, kann man im vorliegenden Fall genauere Aussagen machen:

Satz 5.1 Ist  $F(x,y)$  fastperiodischer Vektor aus  $\mathcal{F}$ , so existieren für jedes reelle  $\omega$  die folgenden Mittelwerte und es gilt

$$A_\omega(x,y) := M_t(T_t F \cdot e^{-i\omega t}) = \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(x,y') e^{-i\omega y'} dy' \right] e^{i\omega y}.$$

Die dadurch definierten Vektoren  $A_\omega(x,y)$  aus  $\mathcal{F}$  sind elementar zu  $\omega$ , also

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(x,y') e^{-i\omega y'} dy' = h_\omega(x)$$

gemäß Satz 3.2. Dabei existiert dieser Mittelwert  $\varphi$ -gleichgradig in  $x$ , d.h. zu jedem positiven  $\epsilon$  gibt es ein  $T_\epsilon$ , sodaß für alle  $T > T_\epsilon$  und alle  $x$  aus  $I$

$$\varphi(x) \left| h_\omega(x) - \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(x,y') e^{-i\omega y'} dy' \right| < \epsilon.$$

Satz 5.1 besagt also unter anderem, daß abstrakter Mittelwert und Bohrscher Mittelwert hier übereinstimmen; wir schreiben daher i.f.  $M_y(f(y))$  für  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(y) dy$ .

Beweis: Wegen der Invarianz des ergodischen MW hat man

$$\begin{aligned} A_{\omega}(x,y) &= A_{\omega}(x,y+c) = M_t(T_t F(x,y+c) \cdot e^{-i\omega t}) = \\ &= M_t(F(x,y+c+t) \cdot e^{-i\omega t}) = M_t(F(x,y+t') \cdot e^{-i\omega t'} \cdot e^{i\omega c}) = \\ &= e^{i\omega c} \cdot A_{\omega}(x,y) . \end{aligned}$$

Da außerdem  $A_{\omega}(x,y)$  Element von  $\mathcal{F}$  ist, hat es nach Satz 3.2 die Form  $h_{\omega}(x) \cdot e^{i\omega y}$ .

Hält man in den Näherungssummen für den abstrakten Mittelwert  $x$  und  $y$  konstant, so erkennt man, daß  $A_{\omega}(x,y)$  Mittelwert der Bohr-f.p. Funktion  $f(c) = F(x,y+c) \cdot e^{-i\omega c}$  ist, wegen der eindeutigen Bestimmtheit eines solchen Mittelwertes (vgl. Maak (9), S. 110) ist es der Bohrsche Mittelwert  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(c) dc$ . Auf Grund der Invarianz dieses Mittelwerts wird

$$\text{Näher} \quad A_{\omega}(x,y) = \text{Bohr-M}_c(f(c)) = M_y(F(x,y') e^{-i\omega y'}) \cdot e^{i\omega y} .$$

Ist  $F \neq 0$  selbst auch elementar,  $F(x,y) = h_{\omega_0}(x) e^{i\omega_0 y}$ , so gibt es sicher ein  $T_0$ , sodaß für  $T > T_0$  ( $\omega$  beliebig reell, fest)

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(\omega - \omega_0)y} dy - M_y(e^{i(\omega - \omega_0)y}) \right| < \varepsilon / \sup_{x \in I} |g(x) \cdot h_{\omega_0}(x)|$$

$$\text{oder} \quad g(x) \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(x,y) e^{-i\omega y} dy - M_y(F(x,y) e^{-i\omega y}) \right| < \varepsilon$$

für alle  $x$  aus I.

Ein derartiges  $T_0$  gibt es dann auch, wenn  $F$  eine endliche Linearkombination elementarer f.p. Funktionen aus  $\mathcal{F}$  ist; da sich jedes f.p.  $F$  aus  $\mathcal{F}$  durch solche Linearkombinationen im Norm-Sinne beliebig genau approximieren läßt, überträgt sich die Richtigkeit der obigen Ungleichung auf ganz  $\mathcal{F}$ . q.e.d.

Definition 5: Die Funktionen  $A_{\omega}(x,y)$  von Satz 5.1 heißen die Fourierkomponenten von  $F(x,y)$  zu  $\omega$  (reell),

$$(21) \quad A_{\omega}(x,y) := M_y(F(x,y) e^{-i\omega y}) \cdot e^{i\omega y} = h_{\omega}(x) \cdot e^{i\omega y} .$$

Die formale Summe  $\sum A_{\omega}(x,y)$  heißt die (abstrakte) Fourierreihe von  $F(x,y)$ ,

$$(22) \quad F(x,y) \sim \sum_{\omega \text{ reell}} h_{\omega}(x) \cdot e^{i\omega y} .$$

Fourierreihen heißen gleich, wenn sie glied- weise übereinstimmen.

Nun ist für ein Element  $F$  von  $\mathcal{f}$  bei konstantem  $x$  die Funktion  $F(x,y)$  Bohr-fastperiodisch und besitzt eine Bohrsche Fourierreihe  $\sum a_{\omega}(x)e^{i\omega y}$ , wo  $a_{\omega}(x) = M_y(F(x,y)e^{-i\omega y})$ , es gilt also nach Satz 5.1

Satz 5.2 Die abstrakte Fourierreihe von  $F$  ist identisch mit der Bohrschen Fourierreihe von  $F$ .

Die Parsevalgleichung für Bohrfastperiodische Funktionen (Maak (9), S. 117) nimmt hier die Form an

$$M_y(|F(x,y)|^2) = \sum_{\omega \text{ reell}} |h_{\omega}(x)|^2 = \sum_{\omega \text{ reell}} |A_{\omega}(x,y)|^2$$

(die wegen  $M_y(|F(x,y)|^2) = M_t(|T_t F(x,y)|^2)$  auch abstrakt gedeutet werden kann):

Satz 5.3 Für fastperiodische Vektoren  $F$  aus  $\mathcal{f}$  gilt eine Parsevalsche Gleichung

$$(23) \quad M_y(|F(x,y)|^2) = \sum_{\omega \text{ reell}} |A_{\omega}(x,y)|^2 \quad x \text{ aus } I.$$

Daraus kann man die üblichen Folgerungen über Fourierreihen ziehen:

Zunächst erhält man durch Integration über ein beliebiges, festes, kompaktes Teilintervall  $I_1$  von  $I$  (dort ist  $F(x,y)$  beschränkt)

$$\sum_{\omega} \int_{I_1} |h_{\omega}(x)|^2 dx \leq K_{I_1} < \infty$$

für jedes endliche System reeller  $\omega_1, \dots, \omega_m$ , sodaß nur höchstens abzählbar viele  $\int_{I_1} |h_{\omega}(x)|^2 dx$  von Null verschieden sein können und damit auch nur höchstens abzählbar viele  $A_{\omega}(x,y)$  auf  $I \times \mathbb{R}$ .<sup>36</sup>

Haben  $F_1$  und  $F_2$  dieselbe Fourierreihe, so hat  $F_1 - F_2$  die Fourierreihe  $\equiv 0$  (nach (21) darf man Fourierreihen linear kombinieren), also ist nach (23)  $M_y(|\Delta F(x,y)|^2) = 0$  auf  $I$ . Da der Mittelwert einer nicht-negativen Bohr-fastperiodischen Funktion nur dann verschwindet, wenn die Funktion selbst verschwindet (Maak (9), S. 42), hat man  $F_1 - F_2 = 0$ , d.h. die Fourierreihe bestimmt  $F(x,y)$  eindeutig.

5.4 In einer Fourierreihe (22) sind nur höchstens abzählbar viele  $A_{\omega}(x,y)$  bzw.  $h_{\omega}(x)$  nicht identisch Null. Fourierreihen darf man linear kombinieren. Fastperiodische  $F(x,y)$  aus  $\mathcal{F}$  mit gleicher Fourierreihe sind identisch auf  $P$ , die Beziehung zwischen den Vektoren  $F$  und ihren Fourierreihen ist also eineindeutig.

Es gibt nun noch einen etwas anderen Weg, zu einer Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion, die ihre Werte in einem Banach-Raum hat, zu kommen:

Statt  $F$  mit den Darstellungskoeffizienten der vorliegenden Gruppe zu mitteln, was Fourierkomponenten ergibt, die Vektoren  $\mathcal{F}$  sind, kann man auch ein inneres Produkt  $(F_1, F_2)$  zwischen fastperiodischen Funktionen erklären und kommt dann, wenn man speziell  $(F, F_{el.})$  bildet, wo  $F_{el.}$  elementare fastperiodische Funktion auf der gegebenen Gruppe ist, die ihre Werte in demselben Banach-Raum hat wie  $F$ , zu Fourierkoeffizienten, die komplexe Zahlen sind (vgl. Maak (10), § 3).

Dazu muß zunächst ein inneres Produkt definiert werden: Sei  $\vartheta(x)$  eine auf  $I$  definierte "Gewichtsfunktion", deren Werte positive reelle Zahlen sind, die meßbar ist und lokal von einem positiven Abstand hat und für die

$$\int_I \frac{\vartheta(x)}{(\vartheta(x))^2} dx < \infty. \quad 37$$

derartige  $\vartheta(x)$  gibt es für jedes zulässige  $\varphi(x)$  (§ 1), und zwar in mannigfacher Art; durch Normierung kann man noch erreichen, daß obiges Integral zu 1 wird. Irgend ein solches  $\vartheta(x)$  werde für das folgende fest ausgewählt. Statt  $\int_I \vartheta(x) C(x) dx$  schreiben wir dann i.f. kurz  $I_x(C(x))$ .

Definition 6: Für fastperiodische Vektoren  $F, G$  aus  $\mathcal{F}$  sei

$$(F, G)_{\vartheta} := I_x(M_y(F(x,y) \cdot \overline{G(x,y)}))$$

$$\text{sowie } \|F\|_{\vartheta} := \sqrt{(F, F)_{\vartheta}}.$$

zunächst hat man hier

Satz 5.5 Für fastperiodische  $F$  und  $G$  aus  $\mathcal{F}$  existiert  $M_y(F(x,y)\overline{G(x,y)})$   $\varphi^2$ -gleichgradig auf  $I$  (vgl. Satz 5.1); es gilt

$$|(F,G)_\varphi| \leq \|F\|_\varphi \cdot \|G\|_\varphi,$$

das Skalarprodukt ist also stets endlich.

Die beiden Mittelwerte sind darin vertauschbar,

$$(F,G)_\varphi = I_x M_y(F\overline{G}) = M_y I_x(F\overline{G}).$$

$I_x(F\overline{G})$  ist Bohr-fastperiodisch.

Der Beweis der  $\varphi^2$ -gleichgradigen Konvergenz von  $M_y(F\overline{G})$  verläuft genauso wie der entsprechende Beweis bei Satz 5.1; daraus folgt, daß  $M_y(F\overline{G})$  stetig ist, also sicher lokal integrierbar. Um die Vertauschbarkeit nachzuweisen, wähle man, was stets möglich ist <sup>38</sup>, ein kompaktes Intervall  $I_1$  aus  $I$  so, daß  $\int_{I-I_1} \frac{\delta(x)}{\varphi^2(x)} dx < \varepsilon$ ; da auf  $I_1$   $\varphi(x)$  von 0 positiven Abstand hat,  $\int_{I-I_1}$  konvergiert dort  $M_y(F\overline{G})$  gleichgradig in  $x$  <sup>38\*</sup>, sodaß man (Fubini) vertauschen darf und das 2.  $M_y$  existiert:

$$(I) \int_{I_1} \delta(x) M_y(F(x,y)\overline{G(x,y)}) dx = M_y \left( \int_{I_1} \delta(x) F(x,y)\overline{G(x,y)} dx \right).$$

Nun ist auf  $P$   $|\varphi^2(x)F(x,y)\overline{G(x,y)}| \leq \|F\|_\varphi \cdot \|G\|_\varphi =: C$ ,

also hat man

$$(II) \int_{I-I_1} \delta(x) M_y(F\overline{G}) dx \leq \int_{I-I_1} \delta(x) \frac{C}{\varphi^2(x)} dx \stackrel{39}{\leq} C \cdot \varepsilon.$$

Daraus folgt, daß  $I_x M_y(F\overline{G})$  existiert und (wenn man  $\int_I \dots dx$  analog abschätzt) der Ungleichung  $(F,G)_\varphi \leq \|F\|_\varphi \cdot \|G\|_\varphi$  genügt.

Weiter existieren <sup>40</sup> die folgenden Integrale und genügen der Abschätzung

$$(III) \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{I-I_1} |\delta(x) F(x,y)\overline{G(x,y)}| dx dy \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{I-I_1} \delta(x) \frac{C}{\varphi^2(x)} dx dy \leq C \cdot \varepsilon \quad \text{für alle } T.$$

Mit Hilfe von (I), (II) und (III) erhält man für hinreichend große  $T$

$$\left| I_x M_y(F\overline{G}) - \frac{1}{2T} \int_{-T}^T I_x(F\overline{G}) dy \right| \leq 3C\varepsilon,$$

somit existiert  $M_y I_x(F\overline{G})$  und ist gleich  $I_x M_y(F\overline{G})$ .

Durch analoge Abschätzungen kann man schließlich auch noch die Fastperiodizität und  $y$ -Stetigkeit von  $I_x(F\overline{G})$  einsehen, sodaß

auch die letzte Behauptung von Satz 5.5 bewiesen ist.

Für das oben erklärte Skalarprodukt gilt nun

**Satz 5.6** Der Raum  $\mathcal{f}$  der fastperiodischen Vektoren wird, versehen mit dem inneren Produkt (24), zu einem euklidischen Raum (d.i. ein Hilbert-Raum bis auf die Vollständigkeit in der  $\|\cdot\|_2$ -Topologie).

Die Gruppe  $\mathcal{Q}$  der Translationen  $T_\alpha$  ist unitär, also  $(T_\alpha f, g)_f = (f, T_{-\alpha} g)_f$ , sodaß die Norm  $\|f\|_f$  invariant gegenüber  $\mathcal{Q}$  ist.

Außerdem gilt  $\|f\|_f \leq \|f\|_2$ .

Der durchweg elementare Beweis möge hier übergangen werden, z.B. folgt die letzte Ungleichung aus der in Satz 5.5; die Gleichwertigkeit von  $\|f\|_f = 0$  und  $f = 0$ , die auch in Satz 5.6 behauptet wird, kann man so einsehen: Da  $M_y(f\bar{g})$  stetig ist (Satz 5.5), und da es wegen  $I_x M_y(f\bar{f}) = 0$  hier f.ü. verschwindet, verschwindet  $M_y(f\bar{f})$  identisch auf  $I$ ; bei festem  $x$  ist daher  $f\bar{f}$  eine nicht-negative fastperiodische Funktion, deren Mittelwert verschwindet, nach Maak (9), S. 42, gilt dann  $f = 0$ .

Nach Satz 5.6 sind jetzt alle Voraussetzungen aus Maak (10), § 3 erfüllt, sodaß man gemäß den dortigen Überlegungen auch auf die folgende Art zu einer Fourierreihe für fastperiodische Elemente von  $\mathcal{f}$  gelangen kann:

Wir betrachten die endlich-dimensionalen irreduziblen invarianten Teilmoduln von  $\mathcal{f}$ , die zu einem festen  $\omega$  gehören (nur solche können zu äquivalenten Darstellungen führen!); diese Moduln spannen einen invarianten Teilmodul  $\mathcal{f}_\omega$  von  $\mathcal{f}$  auf, der nach Satz 3.2 und den darauf folgenden Bemerkungen höchstens zwei-dimensional ist. In jedem dieser Teilmoduln wählen wir eine Basis aus, die bezüglich des inneren Produktes (24) orthonormiert ist und bezeichnen die diese Basis bildenden Funktionen mit

$$f'_{\omega, \nu}(x, y) = h_{\omega, \nu}(x) \cdot e^{i\omega y} \quad (\nu = 1, 2)$$

(ist  $\mathcal{f}_\omega$  0- oder 1-dimensional, so setze man  $h_{\omega, \nu}$  bzw.  $h_{\omega, 2} = 0$ ).

Diese  $F_{\omega, \nu}$  bilden dann eine orthonormierte Basis in  $\mathcal{F}$ .

Ist  $F$  fastperiodischer Vektor, so heißen gemäß Maak (10) die Zahlen

$$a_{\omega, \nu} := (F, F_{\omega, \nu})_{\delta} \quad (\nu = 1, 2; \omega \text{ reell})$$

$\delta$ -Fourierkoeffizienten von  $F$ , während

$$(25) \quad F \sim \sum_{\omega \in \Omega} (a_{\omega, 1} F_{\omega, 1} + a_{\omega, 2} F_{\omega, 2})$$

$\delta$ -Fourierreihe von  $F$  heißt. Diese Ausdrücke hängen zunächst offenbar von  $(\ , \ )_{\delta}$  und damit von  $\delta$  ab (außerdem noch von der gewählten Basis).

Satz 5.7 Die  $\delta$ -Fourierreihe (25) stimmt überein mit der früher definierten Fourierreihe (22), genauer gilt

$$A_{\omega}(x, y) = a_{\omega, 1} F_{\omega, 1}(x, y) + a_{\omega, 2} F_{\omega, 2}(x, y)$$

auf  $P$  für alle reellen  $\omega$ .

In diesem Sinne sind die  $\delta$ -Fourierkoeffizienten unabhängig von  $\delta$  und von der gewählten Basis <sup>41</sup>.

Zum Beweis stellen wir zunächst fest, daß auf Grund der Orthonormierung der  $F_{\omega, \nu}$   $I_x(h_{\omega, i} \cdot \overline{h_{\omega, j}}) = \delta_{ij}$  gilt.

Nun läßt sich jedes einer Fourierkomponente (21) zugeordnete  $h_{\omega}(x)$  darstellen in der Form

$$h_{\omega}(x) = A_{\omega, 1} h_{\omega, 1}(x) + A_{\omega, 2} h_{\omega, 2}(x) \ .$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $\overline{h_{\omega, \nu}(x)}$  und mittelt über  $x$ , so erhält man

$$I_x(h_{\omega}(x) \cdot \overline{h_{\omega, \nu}(x)}) = A_{\omega, \nu}$$

oder mit (21)

$$A_{\omega, \nu} = I_x \{ M_y(F(x, y) e^{-i\omega y}) \cdot \overline{h_{\omega, \nu}(x)} \} = (F, F_{\omega, \nu})_{\delta} = a_{\omega, \nu} \ ,$$

womit die Übereinstimmung gezeigt ist.

Es sind also auch höchstens abzählbar viele  $a_{\omega, \nu} \neq 0$ , diese  $\delta$ -Fourierkoeffizienten bestimmen, bei gegebener fester Basis,  $F(x, y)$  eindeutig.

Aus dem in Maak (10), § 3 Bewiesenen folgt hier noch

Satz 5.8 Die Fourierreihe von  $F$  konvergiert im  $M_2$ -Norm-Sinne gegen  $F$  und es gilt eine Parsevalgleichung

$$(26) \quad \|F\|_2^2 = \sum_{\omega \text{ reell}} (|a_{\omega,1}|^2 + |a_{\omega,2}|^2) .$$

(Diese Form der Parsevalschen Gleichung erhält man übrigens auch sofort durch Integration von (23).)

Zum Abschluß sollen noch einige Bemerkungen über die Fourierreihen gerader fastperiodischer  $F(x,y)$  (vgl. § 2, Schluß) folgen:

Hat  $F(x,y)$  die Fourierreihe  $F \sim \sum h_{\omega}(x) e^{i\omega y}$ ,  $h_{\omega} = M_y(F e^{-i\omega y})$ , so hat die  $F$  durch  $QF = \frac{1}{2}(F + SF)$  zugeordnete gerade Funktion die Fourierreihe

$$(27) \quad \begin{aligned} QF &\sim \sum_{\omega \text{ reell}} \left( \frac{h_{\omega}(x) + h_{-\omega}(x)}{2} \right) e^{i\omega y} \\ \text{oder} \quad QF &\sim h_0(x) + \sum_{\omega > 0} (h_{\omega}(x) + h_{-\omega}(x)) \cos \omega y . \end{aligned}$$

Für gerade  $F$  ( $F=QF$ ) folgt daraus  $h_{\omega}(x) = h_{-\omega}(x)$  für alle reellen  $\omega$ . Diese Eigenschaft der Fourierkomponenten ist charakteristisch für gerade fastperiodische  $F(x,y)$  aus  $\mathcal{f}$ , denn ist  $h_{\omega} = h_{-\omega}$ , so haben  $F$  und  $QF$  nach (27) dieselbe Fourierreihe, stimmen also auf Grund des Eindeutigkeitssatzes 5.4 überein; daraus folgt dann aber  $F(x,y) = SF(x,y) = F(x,-y)$ .

## § 6

## Beispiele

In diesem Abschnitt werden Beispiele zu den vorhergehenden Paragraphen untersucht; insbesondere werden die elementaren Funktionen für spezielle  $a(x)$ , also i.w. die Lösungen von (17)

$$h''(x) - (a(x) - \omega^2) \cdot h(x) = 0$$

angegeben. Bei periodischem  $a(x)$  handelt es sich hier um eine Differentialgleichung vom Hillschen Typ, unter die eine Reihe in Physik und Technik wichtiger Differentialgleichungen fallen (z.B. Legendresche D.-Gl., konfluente hypergeometrische D.-Gl. - vgl. Kamke (6), S. 410).

1)  $a(x) \equiv 0$ ,  $I = (-\infty, \infty)$ ,  $\rho(x) \equiv 1$

Eine verallgemeinerte Lösung von (1) hat hier nach (3) die Form

$$(28) \quad F(x, y) = U(x-y) + V(x+y)$$

mit lokal integriblen  $U$  und  $V$  (die nach Anhang III, 4) i.w. durch  $F$  eindeutig bestimmt sind). Ein solches  $F$  ist genau dann aus  $\mathcal{F}$ ; wenn  $U(s)$  und  $V(t)$  beschränkt sind (aus der Beschränktheit von  $F$  folgt z.B. bei konstantem  $x+y$  und variablem  $x-y$  die Beschränktheit von  $U$ ). <sup>42</sup>

Nach Satz 3.2 haben die elementaren fastperiodischen Funktionen die Gestalt

$$(29) \quad F_{\omega}(x, y) = a \cdot e^{i\omega(-x+y)} + b \cdot e^{i\omega(x+y)}$$

( $\omega$  reell,  $a, b$  komplex, beliebig).

Alle fastperiodischen Funktionen aus  $\mathcal{F}$  können durch endliche Linearkombinationen davon beliebig genau auf  $P = \mathbb{R}^2$  approximiert werden; solche  $F(x, y)$  sind, wie man leicht sieht, auf allen Geraden des  $\mathbb{R}^2$  Bohr-fastperiodisch, also sind es auch die zugehörigen  $U(s)$  und  $V(t)$  in (28); sind umgekehrt  $U$  und  $V$  Bohr-fastperiodisch, so ist das durch (28) gegebene  $F$   $y$ -fastperiodisch gleichgradig in  $x$ , also aus  $\mathcal{F}$ :

Ein  $F(x, y)$  ist genau dann fastperiodischer Vektor von  $\mathcal{F}$ , wenn in (28)  $U(s)$  und  $V(t)$  Bohr-fastperiodisch sind.

haben  $U(s)$  und  $V(t)$  die Bohrschen Fourierreihen  $U \sim \sum a_\omega e^{i\omega s}$ ,  
 $V \sim \sum b_\omega e^{i\omega t}$ , so rechnet man nach § 5 leicht nach, daß die  
Fourierreihe von  $F$  die Gestalt hat

$$(9) \quad F(x, y) \sim \sum_{\omega \text{ reell}} (a_\omega e^{i\omega(-x+y)} + b_\omega e^{i\omega(x+y)}) .$$

$a(x) = C = \text{const.}$ ; (die Differentialgleichung (1) ist dann  
eine Telegrafengleichung)

Die elementaren fastperiodischen Lösungen haben hier gemäß  
Satz 3.2 das Aussehen

$$(11) \quad F_\omega(x, y) = a \cdot e^{\sqrt{C-\omega^2} \cdot x + i\omega y} + b \cdot e^{-\sqrt{C-\omega^2} \cdot x + i\omega y}$$

( $\omega$  reell,  $a, b$  komplex),

die nach Wahl von  $I$  und  $\varphi(x)$  kommen noch zusätzliche Bedingun-  
gen über  $\omega$  und  $C$  hinzu, z.B. für  $I = (-\infty, +\infty)$ ,  $\varphi(x) \equiv 1$   
muß  $C$  reell sein und es kommen nur solche  $\omega$  in Frage, für  
die  $\omega^2 \geq C$ .

$$(15) \quad a(x) = -x, \quad I = [0, +\infty)$$

Nach Kamke (6), S. 440, (10), sind elementare verallgemei-  
nerte Lösungen von (1) von der Form

$$(12) \quad F_\omega(x, y) = k(x + \omega^2) \cdot e^{i\omega y} \quad \text{wobei}$$

$$k(t) := \sqrt{t} \cdot Z_{1/3}(\frac{2}{3} \cdot t^{3/2})$$

Wegen der Definition der Zylinderfunktionen  $Z_\nu(t)$  vgl. Bsp.4)  
Für das zu der Besselfunktion  $J_{1/3}$  gehörige  $k(t)$  gilt  
Für  $t \rightarrow 0$   $k(t) = O(t)$ ; für  $t \rightarrow +\infty$   $k(t) = O(t^{-1/4})$ ;  
Für das zu der v. Neumannschen Funktion  $N_{1/3}$  gehörige  $k(t)$   
für  $t \rightarrow 0$   $k(t) = O(t^0)$ ; für  $t \rightarrow +\infty$   $k(t) = O(t^{-1/4})$ .

Durch entsprechende Wahl der Normfunktion  $\varphi(x)$  bei 0 kann man  
die Dimension der von den  $h_\omega(x) = k(x + \omega^2)$  bzw.  $F_\omega$  gebildeten  
linearen Räume  $L_\omega$  bzw.  $\mathcal{L}_\omega$  zu 1 oder 2 machen (unabhängig von  $\omega$ ).

$$(4) \quad a(x) = \frac{k}{x^2}, \quad I = (0, +\infty)$$

Elementare fastperiodische  $F(x, y)$  werden hier, wie man leicht  
nachprüft, durch die folgenden Ausdrücke gegeben

$$(33) \quad F_{\omega}(x, y) = \sqrt{x} \cdot Z_{\sqrt{k+1/4}}(\omega x) \cdot e^{i\omega y} \quad (\operatorname{Re} \sqrt{k+1/4} > 0 \quad \omega \text{ reell}) \quad 43$$

wo  $Z_{\nu}(t)$  eine Zylinderfunktion ist, die der Besselschen Differentialgleichung (vgl. Magnus-Oberhettinger (12), S. 16)

$$Z_{\nu}''(t) + \frac{1}{t} Z_{\nu}'(t) + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) Z_{\nu}(t) = 0$$

genügt und die in (33) so zu wählen ist, daß man für  $F$  eine endliche Norm erhält.

Bei gegebenem  $k$  kann man dabei durch die Wahl der Normfunktion  $\varphi(x)$  (bei 0) erreichen, daß entweder nur die Besselschen Funktionen  $J_{\sqrt{k+1/4}}$  oder aber auch noch die Neumannschen Funktionen  $N_{\sqrt{k+1/4}}$  endliche Norm liefern; die einem  $\omega$  zugeordnete Lösungsmannigfaltigkeit von (17) ist dementsprechend (unabhängig von  $\omega$ !) stets eindimensional oder stets zweidimensional; bei  $\varphi(x) \equiv 1$  und reellem  $k > -1/4$  geben z.B. nur die Besselschen Funktionen für (33) Elemente von  $\mathcal{E}$ .

Die von Delsartre in (3) untersuchte Differentialgleichung

$$\phi_{rr}'' + \frac{2p+1}{r} \phi_r' = \phi_{tt}'' , \quad p \text{ fest reell, } |p| < \frac{1}{2}$$

läßt sich nun auf Beispiel 4 zurückführen:

Delsartre betrachtet nur gerade stetige Funktionen auf  $(-\infty, \infty)$  sodaß man sich auf  $I = (0, +\infty)$  beschränken kann.

Durch die Transformationen  $r=x$ ,  $t=y$ ,  $F(x, y) = x^{\frac{2p+1}{2}} \cdot \phi(x, y)$  geht jede Lösung  $\phi(r, t)$  obiger Differentialgleichung in eine Lösung  $F(x, y)$  der Differentialgleichung

$$F_{xx}'' - F_{yy}'' = \frac{k}{x^2} F , \quad k = \frac{4p^2-1}{4}, \quad -\frac{1}{4} \leq k < 0$$

über und umgekehrt. Jede fastperiodische Lösung von Delsartre gibt Anlaß zu einem fastperiodischen Vektor  $F$ , der aus  $\mathcal{F}$  zu  $a(x) = \frac{k}{x^2}$ ,  $I = (0, +\infty)$ ,  $\varphi(x) = x^{-(2p+1)/2}$  ist.

Als elementare fastperiodische Vektoren aus diesem  $\mathcal{F}$  (d.s. diejenigen  $F$  von (33), die mit obigem  $\varphi(x)$  endliche Norm ergeben) kommen für  $p > 0$  nur die Funktionen

$$\sqrt{x} \cdot J_p(\omega x) e^{i\omega y} \quad (\sqrt{k+1/4} \text{ wird hier } = p)$$

in Frage. --

Wegen weiterer Beziehungen zu den Ergebnissen von Delsartre vgl. § 11.

$$1) \quad a(x) = -e^{2x}, \quad I = (-\infty, +\infty)$$

Lösungen von (17) sind hier die Funktionen  $h_\omega(x) = Z_{i\omega}(e^x)$ ,  
die zugehörigen elementaren  $F_\omega(x,y)$  sehen so aus:

$$34) \quad F_\omega(x,y) = Z_{i\omega}(e^x) \cdot e^{i\omega y};$$

im übrigen gelten hier analoge Bemerkungen wie bei 4).

## II Eine Erweiterung des Begriffs fastperiodisch

### § 7

#### Der Begriff a-fastperiodisch

Bei der Untersuchung der Periodizitätseigenschaften einer Funktion  $f(x)$  wird gewöhnlich der Funktionswert von  $f$  an einer Stelle  $x$  mit dem Funktionswert an einer Stelle  $x+y$  verglichen, oder allgemeiner die Funktion  $f(x)$  mit der Translatierten  $f(x+y)$ .

Es wird sich zeigen, daß man zu einer Erweiterung des üblichen Begriffs "fastperiodisch" kommen kann, wenn man die reelle Zahlengerade verläßt und nicht mehr einfach translatierte Funktionen, sondern allgemeiner neue Funktionen  $F(x,y)$  zum Vergleich heranzieht, wobei die Abhängigkeit von  $y$  durch eine hyperbolische Differentialgleichung (1) geregelt wird.

**Definition 7:** Eine auf  $I$  definierte, endlich komplexwertige meßbare Funktion heißt **a-fastperiodisch** (genauer **a(x)-fastperiodisch zu  $\varphi(x)$** ), falls es ein  $F(x,y)$  aus dem zugehörigen  $\mathcal{F}$  gibt, <sup>83</sup> sodaß

$$f(x) = F(x,0) \quad \text{auf } I.$$

Jedes solche  $F$  werde mit  $F_f$  bezeichnet (im übrigen sind die Bezeichnungen dieselben wie im I. Teil dieser Arbeit).

Als Norm  $\|f\|_f$  von  $f$  werde bezeichnet

$$\|f\|_f := \inf (\|F\|_f : F \in \mathcal{F} \text{ \& } F \text{ ein } F_f)$$

Für a-fastperiodische  $f(x)$  gilt also stets  $\sup_{x \in I} \varphi(x) \cdot |f(x)| < \infty$ .

Da nach Satz 2.5 zu jedem a-fastperiodischen  $f$  auch ein gerades fastperiodisches  $F_f$  existiert, und da nach Satz 2.3 gerade  $F$  solche sind, für die " $F_y(x,0) = 0$ ", fällt der hier eingeführte Begriff der a-Fastperiodizität in den Sonderfällen,

Die bisher (von Delsartre (vgl. § 11), Levitan und Marcenko<sup>44</sup>) betrachtet wurden, mit den dort behandelten zusammen bzw. erweist sich als eine Erweiterung davon.

Faßt man die Menge aller  $\alpha$ -fastperiodischen Funktionen  $f(x)$  (solche  $f$  haben per definitionem endliche Norm) in natürlicher Weise als linearen normierten Raum  $\mathcal{F}$  auf, so gilt

**Satz 7.1** Die Menge der  $\alpha$ -fastperiodischen Funktionen  $f(x)$  bildet, versehen mit der Norm  $\|f\|_{\mathcal{F}}$ , einen Banach-Raum ;  $\|f\|_{\mathcal{F}} = 0$  ist gleichbedeutend mit  $f(x) \equiv 0$  auf  $I$ ; es gilt

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \inf (\|F\|_{\mathcal{F}} : F \text{ gerade, f.p.} \ll f, F \text{ ein } F_f).$$

Mit  $f$  ist auch jedes "verschobene  $f$ ", d.h. jede Funktion  $F_f(x, y_0)$  ( $y_0$  fest, beliebig reell) aus  $\mathcal{F}$ ;  $\alpha$ -fastperiodische  $f(x)$  sind stetig auf  $I$ .

**Beweis:**  $\mathcal{F}$  ist ein linearer Raum, weil  $\mathcal{F}$  einer ist.

Gleichheit zweier Elemente aus  $\mathcal{F}$  bedeutet Übereinstimmung der Funktionswerte in allen  $x$  aus  $I$ , da  $\|f\|_{\mathcal{F}} = 0$  besagt, daß  $f(x)$  auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$  beliebig klein ist.

Die "Norm  $\|f\|_{\mathcal{F}}$ " genügt der Dreiecksungleichung, denn

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{\mathcal{F}} &= \inf_F \|F_{f+g}\|_{\mathcal{F}} = \inf_F \sup_P \varphi(x) \cdot |F_{f+g}(x, y)| = \\ &= \inf_{\substack{F_1=F_f \\ F_2=F_g}} \sup_P \varphi |F_1 + F_2| \quad (\text{denn } F_1+F_2 \text{ ist stets ein } F_{f+g}) \\ &\leq \inf_{F_1, F_2} (\sup_P \varphi |F_1| + \sup_P \varphi |F_2|) \quad (\text{da } F_1, F_2 \text{ unabhängig sind}) \\ &\leq \inf_{F_1} \sup_P \varphi |F_1| + \inf_{F_2} \sup_P \varphi |F_2| \\ &= \|f\|_{\mathcal{F}} + \|g\|_{\mathcal{F}}; \end{aligned}$$

weil  $\|kf\|_{\mathcal{F}} = |k| \cdot \|f\|_{\mathcal{F}}$  ( $k$  komplex konstant) trivial ist, handelt es sich also wirklich um eine Norm.

Ist  $\|f\|_{\mathcal{F}} = A$ , so gibt es bei gegebenem positiven  $\epsilon$  ein  $F_f$ , sodaß  $\|F_f\|_{\mathcal{F}} < A + \epsilon$ , also ist

$$\|QF_f\|_{\mathcal{F}} = \|\frac{1}{2}(F_f + SF_f)\|_{\mathcal{F}} < \frac{1}{2}(A + \epsilon + A + \epsilon) = A + \epsilon; \text{ nun ist } QF_f \text{ gerade,}$$

somit hat man  $\inf (\|F_f\|_{\mathcal{F}} : F_f \text{ gerade}) \leq \|f\|_{\mathcal{F}}$ , also Gleichheit.

Da  $f$   $y$ -translationsinvariant ist, ist hier ein verschobenes  $f$  wieder  $a$ -fastperiodisch (das zugehörige  $F_{F_f}(x, y_0)(x, y)$  ist einfach  $F_f(x, y + y_0)$ ).

Nach Satz 4.1 sind fastperiodische  $F(x, y)$  stets stetig, also müssen  $a$ -fastperiodische  $f(x)$  auf  $I$  notwendig ebenfalls stetig sein.

Es bleibt jetzt nur noch die Vollständigkeit von  $\mathcal{F}$  nachzuweisen: Sei eine Fundamentalfolge  $f_1, f_2, \dots$   $a$ -fastperiodischer Funktionen gegeben; wir wählen eine Teilfolge  $f_1^0, f_2^0, \dots$  so aus, daß

$$\|f_v^0 - f_{v+1}^0\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{1}{2^v} \left(\frac{1}{2}\right)^v$$

und dazu fastperiodische  $F_{f_v^0} =: F_v$  aus  $\mathcal{F}$  mit

$$\|F_v - F_{v+1}\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{1}{2^v} \left(\frac{1}{2}\right)^v,$$

was stets möglich ist. Die  $F_v$  bilden dann eine Fundamentalfolge in  $\mathcal{F}$ , denn

$$\|F_v - F_{v+k}\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{1}{2^v} \sum_{\mu=v}^{v+k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} < \frac{1}{2^v} \quad \text{für alle natürlichen } k.$$

Demnach konvergieren die  $F_v$  in  $\mathcal{F}$  wegen der Abgeschlossenheit von  $\mathcal{F}$  gegen ein fastperiodisches  $F_{\infty}$ . Setzt man  $f_{\infty}(x) := F_{\infty}(x, 0)$ , so ist  $f_{\infty}$  aus  $\mathcal{F}$  und es gilt

$$\|f_{\infty} - f_v^0\|_{\mathcal{F}} \leq \|F_{\infty} - F_v\|_{\mathcal{F}} \rightarrow 0, \text{ also auch } \|f_{\infty} - f_v\|_{\mathcal{F}} \rightarrow 0. \quad \text{q.e.d.}$$

Ist das zugrundegelegte  $x$ -Intervall  $I$  beidseitig unendlich,  $I = (-\infty, +\infty)$ , so lassen sich etwas genauere Aussagen über die Norm  $\|f\|_{\mathcal{F}}$  machen; auch die Definition von  $a$ -fastperiodisch läßt sich hier etwas abschwächen:

**Satz 7.2** Ist  $I = (-\infty, +\infty)$ , so ist eine auf  $I$  definierte komplexwertige Funktion  $f(x)$  genau dann  $a$ -fastperiodisch, wenn es zu jedem positiven  $\varepsilon$  ein  $F_{f, \varepsilon}$  aus  $\mathcal{F}$  und ein fastperiodisches  $F_{\varepsilon}$  aus  $\mathcal{F}$  gibt, sodaß

$$\|F_{f, \varepsilon} - F_{\varepsilon}\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon.$$

Anders ausgedrückt: ein  $f(x)$  ist  $a$ -fastperiodisch genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine " $\varepsilon$ -fastperiodische" verallgemeinerte Lösung  $F_f$  von (1) gibt.

Fortsetzung von Satz 7.2 Im Falle eines beidseitig unendlichen Intervalls  $I$  wird außerdem die Norm  $\|f\|_g$  durch das eindeutig bestimmte gerade  $F_f^0$  aus  $\mathcal{G}_0$  angenommen,  $\|f\|_g = \|F_f^0\|_g$ .

Es genügt in diesem Falle also zu fordern, daß passende verallgemeinerte Lösungen  $F_f$  von (1) hinreichend benachbart zu fastperiodischen  $F$  (die nicht notwendig auf  $I$  mit  $f(x)$  übereinzustimmen brauchen) sind, von vornherein brauchen die  $F_f$  selbst nicht fastperiodisch zu sein, sie können auch noch von  $\varepsilon$  abhängen.

Beweis: Nach Anhang III, 10) sind hier gerade  $F_f^0$  durch die Vorgabe von  $f$  eindeutig bestimmt, sodaß  $QF_{f,\varepsilon}$  stets dieselbe Funktion ist. Die geraden Funktionen  $QF_{1/v}$  von Satz 7.2 bilden daher in  $\mathcal{G}$  eine Fundamentalfolge, die gegen  $QF_{f,\varepsilon}$  konvergiert;  $QF_{f,\varepsilon}$  ist also ebenfalls aus  $\mathcal{G}$ , d.h.  $f(x)$  ist a-fastperiodisch.

Der umgekehrte Teil der ersten Behauptung von Satz 7.2 ist trivial.

Da nach Satz 7.1  $\|f\|_g = \inf (\|F_f\|_g : F_f \text{ gerade f.p.}) = \|F_f^0\|_g$ , ist auch der zweite Teil obigen Satzes richtig.

Man wird sich natürlich fragen, ob ein Analogon zu Satz 7.2 auch bei beschränktem  $I$  gültig ist; weitgehende Auskunft darüber gibt § 10.

Im übrigen möge hier noch auf Satz 2.1 hingewiesen werden, der besagt, daß ein  $f(x)$  dann schon a-fastperiodisch ist, wenn nur  $\sup_{x \in I} g(x) \cdot |f(x)| < \infty$  (dies ist stets notwendig) und wenn es eine verallgemeinerte Lösung  $F_f$  von (1) gibt, die im Sinne von Satz 2.1 b) fastperiodisch ist, für die aber nicht nachgeprüft zu werden braucht, ob  $\|F_f\|_g < \infty$ .

§ 8

Der Approximationssatz

Der für fastperiodische verallgemeinerte Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichung (1) bewiesene Approximationssatz 3.3 überträgt sich sofort auf a-fastperiodische Funktionen:

Satz 8.1 Ein  $f(x)$  ist genau dann a-fastperiodisch, wenn es zu jedem positiven  $\varepsilon$  eine endliche Linearkombination von elementaren a-fastperiodischen Funktionen  $h_\omega(x)$  gibt, d.s. Lösungen von ( $\omega$  reell)

$$(17) \quad h_\omega''(x) - (a(x) - \omega^2) \cdot h_\omega(x) = 0,$$

für die  $\sup_{x \in I} |\varphi(x) \cdot h_\omega(x)| < \infty$ ,  
sodaß

$$\|f - \sum_\omega h_\omega\|_\varphi < \varepsilon.$$

Insbesondere läßt sich also jedes a-fastperiodische  $f(x)$  auf  $I$   $\varphi$ -gleichgradig beliebig genau durch solche Summen approximieren,

$$\sup_{x \in I} \varphi(x) \cdot |f(x) - \sum_{\omega \neq 0} h_\omega(x)| < \varepsilon.$$

Das "genau dann" ist hier etwas irreführend, denn wenn ein  $f(x)$  sich durch solche Summen im Sinne der  $\|\cdot\|_\varphi$ -Norm approximieren läßt, so muß es, damit die Norm überhaupt definiert ist, von vornherein a-fastperiodisch sein <sup>45</sup>. Wesentliches besagt hier nur der andere Teil der obigen Aussage.

Man kann jedoch mit Hilfe von Satz 7.2 auch den ersten Teil bei beidseitig unendlichem Intervall  $I$  nicht-trivial formulieren (für den Fall endlicher Intervalle  $I$  vgl. § 10):

Satz 8.1' Im Falle  $I = (-\infty, +\infty)$  ist ein  $f$  genau dann a-fastperiodisch, wenn es zu jedem positiven  $\varepsilon$  ein  $F_{f,\varepsilon} \in \mathcal{F}$  und eine endliche Linearkombination elementarer  $F_{\omega,\varepsilon}$  aus  $\mathcal{F}$  gibt, sodaß  $\|F_{f,\varepsilon} - \sum_\omega F_{\omega,\varepsilon}\|_\varphi < \varepsilon$ .

Zum Beweise des zweiten Teils von Satz 8.1 ("Insbesondere ...") ist noch zu bemerken, daß die Beschränkung auf  $\omega \neq 0$  hier deshalb möglich ist, weil nach (17) jedes  $h_{-\omega}$  ein  $h_\omega$  ist.

Inwieweit sich dieser Teil in eine genau-dann-Aussage bringen läßt, ist unbekannt <sup>46</sup>, i.a. scheint dies nicht möglich zu sein; im Falle eines endlichen Intervalls  $I$  werden die Verhältnisse jedoch durch § 10 größtenteils geklärt.

Satz 8.1 war (durch die Arbeiten von Levitan (8) 1949 und Marčenko (13) 1950 - in der Form Satz 8.1') bisher lediglich bekannt für den Fall  $I = (-\infty, +\infty)$ ,  $\varphi(x) \equiv 1$ ,  $a(x)_{x \rightarrow \infty} = O(x^{-3-\varepsilon})$  (Levitan) bzw.  $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)|a(x)| dx < \infty$  (Marčenko),  $a(x)$  stetig und gerade; viel früher hat schon Delsartre in (3) 1938 einen Satz in dieser Richtung bewiesen, allerdings nur für eine spezielle Differentialgleichung der Gestalt (1) (vgl. § 6, Beispiel 4 sowie § 11, Beispiel 4). Dabei benutzte Delsartre gewisse Integraltransformationen, die seine "I-fast-periodischen Funktionen" in Bohr-fastperiodische Funktionen transformieren, Levitan und Marčenko benutzen ebenfalls Integraldarstellungen der Lösungen von (1) zu vorgegebenen Anfangsbedingungen, dadurch kommen dann die Einschränkungen über  $I$  und  $a(x)$  herein.

Der folgende Satz soll nun noch zeigen, daß es sich beim Begriff a-fastperiodisch wirklich um eine Erweiterung des Bohrschen Begriffs von fastperiodisch handelt:

Satz 8.2 Ein  $f(x)$  ist genau dann Bohr-fastperiodisch, wenn es 0-fastperiodisch ist, d.h. genauer wenn es fastperiodisch ist zu  $a(x) \equiv 0$ ,  $\varphi(x) \equiv 1$ ,  $I = (-\infty, +\infty)$ .

Beweis: Ist  $f$  0-fastperiodisch, so läßt es sich gemäß Satz 8.1 auf  $I$  gleichmäßig beliebig genau durch endliche Linearkombinationen von Lösungen von  $h_{\omega}'' + \omega^2 h_{\omega} = 0$ , d.h. durch endliche trigonometrische Polynome  $\sum A_{\omega} e^{i\omega x}$ , approximieren; solche  $f$  sind aber Bohr-fastperiodisch.

Ist umgekehrt  $f(x)$  Bohr-fastperiodisch, so ist nach § 6, Beispiel 1,  $F(x, y) := f(x+y)$  ein fastperiodisches  $F_F$  mit  $\|F\|_1 < \infty$  aus  $\mathcal{F}$ ,  $f$  ist 0-fastperiodisch. Nebenbei ergibt sich  $\|f\| = \sup_{x \in I} |f|$ .

## § 9      Fourierreihen a-fastperiodischer Funktionen

Dieser Abschnitt bringt keine neuen Ergebnisse, es werden lediglich die bisher gewonnenen Sätze (bes. § 5) auf den hier vorliegenden Fall spezialisiert bzw. dafür umformuliert.

Definition 8: Unter einer Fourierreihe einer a-fastperiodischen Funktion  $f(x)$  werde die aus der Fourierreihe eines fastperiodischen  $F_f$  für  $y = 0$  entstehende Reihe verstanden,

$$(35) \quad f(x) \sim \sum_{\omega \in \Omega} h_{\omega}(x), \text{ wo } h_{\omega}(x) := M_y(F_f(x, y)e^{-i\omega y})$$

Die  $h_{\omega}(x)$  sind dabei Lösungen von (17) gemäß Satz 5.1 und Satz 3.1.

Führt man wie in § 5, Definition 6, mittels einer Gewichtsfunktion  $d(x)$  ein Skalarprodukt  $(F_f, F_g)_d$  ein, so kann man auch von Fourierkoeffizienten  $a_{\omega,1}$ ,  $a_{\omega,2}$  von  $f(x)$  sprechen (genauer von einem zu  $F_f$  gehörigen System von Fourierkoeffizienten von  $f$ ), die zugehörige Fourierreihe von  $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{\omega \in \Omega} (a_{\omega,1} h_{\omega,1}(x) + a_{\omega,2} h_{\omega,2}(x))$$

stimmt nach Satz 5.7 mit der oben definierten überein, stets sind nur abzählbar viele Fourierkomponenten von Null verschieden.

Ist das Intervall  $I$  beidseitig unendlich, so kann man jeder a-fastperiodischen Funktion  $f(x)$  in natürlicher Weise eindeutig eine Fourierreihe zuordnen: Nämlich die, die man aus dem (nach Anhang III, 10) eindeutig festgelegten geraden  $QF_f$  erhält. Bei  $I = (-\infty, +\infty)$  werde i. f. stets diese spezielle Fourierreihe als die Fourierreihe von  $f$  bezeichnet; der Übergang von einer beliebigen Fourierreihe zu dieser entspricht im übrigen nach den Schlußbemerkungen von § 5 lediglich einer Zusammenfassung der Glieder  $h_{\omega}$  und  $h_{-\omega}$ , sodaß also die Funktionen  $h_{\omega} + h_{-\omega}$  hier unabhängig von der speziellen Wahl der fastperiodischen  $F_f$  werden!

Wenn es auch im allgemeinen Fall eines beliebigen Intervalls  $I$  mehrere Fourierreihen zu einem vorgelegten  $a$ -fastperiodischen  $f(x)$  geben kann (vgl. § 10, Anmerkung 52), so bestimmt doch irgendeine dieser Fourierreihen rückwärts  $f(x)$  eindeutig: Haben nämlich  $f$  und  $g$  dieselbe Fourierreihe  $\sum_{\omega} h_{\omega}(x)$ , so gibt es nach Definition fastperiodische  $F_f$  und  $F_g$ , die beide dieselbe Fourierreihe  $\sum_{\omega} h_{\omega}(x)e^{i\omega y}$  haben, die also nach Satz 5.4 übereinstimmen müssen; erst recht müssen dann  $f$  und  $g$  zusammenfallen.

Wenn man will, kann man die Sätze 5.3 bzw. 5.8 auch hier anwenden und so von einer Parsevalgleichung für  $a$ -fastperiodische Funktionen sprechen <sup>47</sup>. Ob und in welchem Sinne die endlichen Abschnitte der Fourierreihe von  $f$  (gegen  $f$ ) konvergieren, ist ungeklärt (vgl. die Beispiele 1) und 2) in § 11).

Ein ziemlich trivialer Sonderfall, in dem man obige Frage beantworten kann, ist z.B. der, daß  $\sum_{\omega} h_{\omega}(x)$  absolut und  $\varphi$ -gleichgradig auf  $I$  konvergiert;  $\sum_{\omega} h_{\omega}(x)$  konvergiert dann gegen ein  $a$ -fastperiodisches  $f(x)$  mit dieser Fourierreihe, da die zugeordneten Linearkombinationen elementarer Lösungen von (1),  $\sum_{\omega} h_{\omega}(x)e^{i\omega y}$  dann im Sinne der Normtopologie von  $\mathcal{E}$  gegen ein fastperiodisches  $F_f$  konvergieren, das als Fourierreihe die Ausgangsreihe hat.

Daß die hier eingeführte Fourierreihe im Bohrschen Fall mit der dann üblichen Fourierreihe i.w. zusammenfällt, wird in § 11, Beispiel 1, deutlich werden.

# § 10 a-Fastperiodizität auf beschränkten Intervallen

Ist das zugrundegelegte Intervall  $I$  endlich, so kann man unter gewissen Einschränkungen für  $a(x)$  und  $\varphi(x)$  <sup>48</sup> sämtliche a-fastperiodischen Funktionen angeben:

Satz 10.1 Ist  $I$  endlich,  $a(x)$  über  $I$  integrabel sowie  $\varphi(x)$  auf  $I$  beschränkt und  $\varepsilon > 0$ , so sind folgende drei Bedingungen gleichwertig:

- a)  $f(x)$  ist auf  $I$  gleichmäßig stetig
- b)  $f(x)$  ist a-fastperiodisch
- c)  $f(x)$  läßt sich gleichmäßig auf  $I$  beliebig genau durch endliche Summen  $\sum_{\omega \in \sigma} h_{\omega}(x)$  annähern.

Dabei sind die  $h_{\omega}(x)$  wie in Satz 3.2 zu verstehen.

Ist  $I$  kompakt (auf diesen Fall ließe sich obiger Satz übriggens leicht zurückführen), so sind die Voraussetzungen von Satz 10.1 wegen der über  $a(x)$  und  $\varphi(x)$  in § 1 gemachten Annahmen stets erfüllt, wenn nur  $\varphi(x)$  beschränkt ist, sodaß dann jedes stetige  $f(x)$  oder jeder gleichmäßige Grenzwert von Summen  $\sum_{\omega \in \sigma} h_{\omega}(x)$  a-fastperiodisch ist.

Beweis: Aus b) folgt c) nach Satz 8.1 (nach Anhang II, 2) sind hier alle  $h_{\omega}(x)$  beschränkt, sodaß die Bedingung  $\sup_{x \in I} |\varphi(x) h_{\omega}(x)| < \infty$  hier überflüssig wird).

Aus c) folgt a), denn jedes einzelne  $h_{\omega}(x)$  ist nach Anhang II, 2) auf  $I$  beschränkt, also nach Anhang II, 4) dort gleichmäßig stetig.

Aus a) folgt b): Hier ist ein fastperiodisches  $F_f$  aus  $f$  anzugeben. Es wird gezeigt werden, daß es unter den Voraussetzungen von Satz 10.1 auf dem abgeschlossenen Streifen  $\bar{P}$  stetige, periodische  $F_f$  gibt, die auf  $\bar{P}$  verallgemeinerte Lösungen

(1) sind, für die  $F_f(x,0) = f(x)$  und für die  $F_f(x,y+T) = F_f(x,y)$  auf  $\bar{P}$  mit passendem  $T$ .

solches  $F_f$  ist wegen der Periodizität und Stetigkeit auf  $\bar{P}$  beschränkt, also aus  $\mathcal{V}$ , es erfüllt die Bedingungen a) (weil  $F_f$  auf kompakten Teilmengen von  $\bar{P}$  gleichmäßig stetig ist) und von Satz 4.2, ist somit nach Satz 4.2 fastperiodisch aus  $\mathcal{V}$ , mit Satz 10.1 bis auf den oben erwähnten Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz: Sei  $a(x)$  auf dem endlichen Intervall  $I = \{c,d\}$  <sup>49</sup> definiert, endlich komplexwertig sowie über  $I$  im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Sei weiter  $f(x)$  auf  $I$  definiert, endlich komplexwertig und gleichmäßig stetig.

Dann existiert zu jedem positiven  $\eta$  eine auf  $\bar{P} = \bar{I} \times \mathbb{R}$  definierte, dort stetige, komplexwertige Funktion  $F_f(x,y)$ , die auf  $\bar{P}$  verallgemeinerte Lösung von (1) ist, sodaß auf  $I$  bzw.  $\bar{P}$

$$F_f(x,0) = f(x) \quad \text{und} \quad F_f(x,y+T) = F_f(x,y)$$

wo  $T := d-c + \eta$ . <sup>84</sup>

Beweis des Hilfssatzes: Es wird mittels des Picardschen Iterationsverfahrens eine Funktion  $G(s,t)$  konstruiert, die auf  $\bar{P} := \{(s,t) : s+t \text{ aus } 2\bar{I}\}$  definiert und stetig ist, für die  $G(s,s) = f(s)$  für  $s$  aus  $I$ , die einer Gleichung (3) genügt und die längs der Geraden  $s+t = 2x = \text{const. (aus } 2\bar{I})$  gleichmäßig periodisch ist, d.h. für die

$$G_T(s,t) = G(s-T, t+T) = G(s,t) \quad \text{für alle } (s,t) \text{ aus } \bar{P}.$$

Es einem solchen  $G$  gemäß § 1 zugeordnete  $F$  hat dann die in dem obigen Hilfssatz behaupteten Eigenschaften.

Bei der Iteration gehen wir folgendermaßen vor:

Zunächst kann man wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f(x)$  dieses eindeutig und stetig auf  $\bar{I} = [c,d]$  fortsetzen zu  $\tilde{f}(x)$ .

Bei nun (vgl. Fig. 10)

$$U_0(s) := \begin{cases} \tilde{f}(s) \text{ auf } [c, d] \\ \frac{1}{\gamma}(\tilde{f}(c)(s-d) - \tilde{f}(d)(s-d-\gamma)) \text{ auf } (d, d+\gamma] \\ \text{sonst periodisch mit } T = d-c + \gamma \end{cases}$$

$U_0(s)$  ist dann für alle reellen  $s$  definiert, stetig und hat die Periode  $T$ , außerdem ist  $\sup_{s \in \mathbb{R}} |U_0(s)| = \sup_{x \in I} |f(x)| =: G$ .

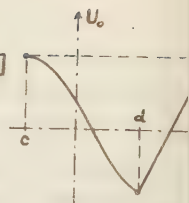


Fig. 10

Weiter sei

$G_1(s, t) := U_0(s)$ ;  $G_0 = A_0 = 0$  auf  $\bar{B}$  und für  $m = 0, 1, 2, \dots$

$$(37) \quad G_{m+1}(s, t) := U_0(s) + \frac{1}{4} \iint_{b(s, t)} a\left(\frac{s+t}{2}\right) G_m(s', t') ds' dt' - A_{m+1}(s) \\ =: U_0(s) + \frac{1}{4} H_{m+1}(s, t) - A_{m+1}(s) \quad \text{auf } \bar{B},$$

$$(38) \quad A_{m+1}(s) := \frac{1}{4} \iint_{b(s, t)} a\left(\frac{s+t}{2}\right) G_m(s', t') ds' dt' = \frac{1}{4} H_{m+1}(s, s) \\ \text{für } s \in [c, d], \text{ zwischen } d \text{ und } d+\gamma \text{ stetig und stückweise linear so, daß } A(d+\gamma) = A(c) \text{ und daß die folgende Ungleichung (39) dort erfüllt ist, im übrigen periodisch mit der Periode } T.$$

Wir werden zeigen, daß solche  $G_{m+1}$  und  $A_{m+1}$  stets existieren, daß sie stetig und periodisch im Sinne (36) sind, und daß für sie die folgenden Abschätzungen <sup>49</sup> gelten:

$$(39) \quad |A_{m+1}(s) - A_m(s)| \leq \frac{C}{2} \left( \frac{A_1(s, s)}{m!} \right)^m =: \frac{1}{2} R_m(s, s) \quad \text{für } s \in [c, d+\gamma]$$

$$(40) \quad |G_{m+1}(s, t) - G_m(s, t)| \leq C \frac{(A \cdot l(s, t))^m}{m!} =: R_m(s, t)$$

auf dem abgeschlossenen Parallelogramm  $c \leq s \leq d+\gamma$ ,  $(s, t)$  aus  $\bar{B}$  (Fig. 11);

Dabei ist  $C := \sup_{x \in I} |f(x)|$ ,  $A := \int_I |a(x)| dx$  (nach Voraussetzung sind  $C$  und  $A < \infty$ );

$l(s, t) :=$  halbe Kathetenlänge desjenigen

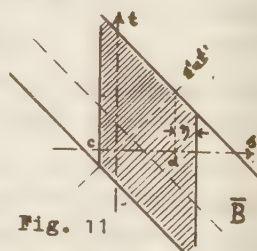


Fig. 11

Rechtwinkligen Dreiecks"  $b(s, t)$ , das  $b(s, t)$  umschließt, bei dem der Scheitel des rechten Winkels auf der Geraden  $s=t$  liegt und dessen Hypotenuse auf  $s+t=2x_0$  liegt (Fig. 12). Man sieht leicht, daß

$$l(s, t) = \text{Max} (|s-x_0|, |t-x_0|) .$$

Überdies sei  $x_0$  so gewählt, daß

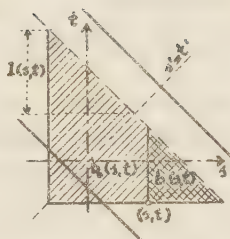
$$0 \leq x_0 - c \leq d - x_0 .$$


Fig. 12

Für die Abschätzungen werden wir eine bessere Schranke für das Integral

$$= \iint_{b(s,t)} |a(\frac{s+t}{2})| \cdot (l(s,t))^k ds dt$$

benötigen; man kann sie in der folgenden Weise erhalten (Fig. 13):

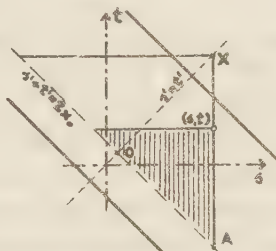


Fig. 13

$$\leq \iint_{b(s,t)} |\tilde{a}(\frac{s+t}{2})| \cdot (l(s,t))^k ds dt$$

( $\tilde{a}(x) := a(x)$  auf  $I$ , sonst  $=0$ )

$$= 2 \iint_{\Delta OAX} |\tilde{a}(\frac{s+t}{2})| \cdot (l(s,t))^k ds dt$$

(Symmetrie von  $\tilde{a}(\frac{s+t}{2})$  und  $l(s,t)$  an der Geraden  $s=t$ !)

$$= 2 \int_{x_0}^s \int_{2x_0-s}^{s'} |\tilde{a}(\frac{s+t}{2})| \cdot |s'-x_0|^k dt ds'$$

(auf der Strecke  $s=s'$  aus  $\Delta OAX$  ist  $l(s,t)$  im Falle von Fig. 13 nach (41) konstant durch  $|s'-x_0|$  gegeben!)

$$= 2 \int_{x_0}^s |s'-x_0|^k \cdot \int_{2x_0-s}^{2s'} |\tilde{a}(\frac{r}{2})| dr ds'$$

$$\leq 2A \int_{x_0}^s |s'-x_0|^k ds' \quad (\text{außerhalb } I \text{ ist } \tilde{a}(x) = 0)$$

$$= \frac{2A}{k+1} \cdot |s-x_0|^{k+1} = \frac{2A}{k+1} \cdot (l(s,t))^{k+1} .$$

Das Endergebnis

$$(42) \quad \mathfrak{Y}_k \leq \frac{2A}{k+1} (l(s,t))^{k+1}$$

dieser Abschätzung bleibt auch in den anderen möglichen Lagen des Punktes  $(s,t)$  bezüglich der Geraden  $s=t$  und  $s+t=2x_0$  richtig, wie analoge Rechnungen zeigen.

Damit können wir nun die Erfüllbarkeit der Formeln (37) mit (40) durch vollständige Induktion zeigen:

Für  $m = 0$  sind (38) und (39) trivial ( $A_1=0$ ), (40) ist erfüllt wegen  $\sup_{s \in \mathbb{R}} |U_0(s)| = C$ , außerdem hat man  $A_1(s+T)=A_1(s)=0$

sowie  $G_1(s-T, t+T) = U_0(s-T) = U_0(s) = G_1(s, t)$  auf  $\bar{B}$ , schließlich sind  $A_1$  und  $G_1$  dort stetig.

Gelten (37) mit (40) für  $m = k-1$ , so gelten sie für  $m = k$  zunächst im Bereiche  $c \leq s \leq d$ ,  $(s, t)$  aus  $\bar{B}$ :

Da nach Induktionsvoraussetzung  $G_k(s, t)$  auf  $\bar{B}$  stetig ist, ist es dort lokal beschränkt, sodaß alle vorkommenden Integrale existieren<sup>50</sup> und die durch (37) bzw. (38) gegebenen  $G_{k+1}$  und  $A_{k+1}$  stetig sind (von  $H_{k+1}$  gilt dies sogar auf ganz  $\bar{B}$ ).

Weiter erhält man für  $s \in [c, d]$  unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung und mit (42)

$$\begin{aligned} |A_{k+1}(s) - A_k(s)| &\leq \frac{1}{4} \iint_{b(s,t)} |a(\frac{s+t}{2})| |G_k(s', t') - G_{k-1}(s', t')| ds' dt' \\ (39'') \quad &\leq \frac{1}{4} C \cdot \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \iint_{b(s,t)} |a(\frac{s+t}{2})| \cdot (l(s', t'))^{k-1} ds' dt' \\ &\leq \frac{C}{2} \frac{A^k}{k!} l(s, s)^k = \frac{1}{2} R_k(s, s), \quad \text{d.i. (39) für } m=k; \end{aligned}$$

ebenso erhält man unter Verwendung des soeben Bewiesenen für  $s \in [c, d]$ ,  $(s, t) \in \bar{B}$

$$\begin{aligned} |G_{k+1}(s, t) - G_k(s, t)| &\leq \frac{1}{4} \iint_{b(s,t)} |a(\frac{s+t}{2})| (G_k(s', t') - G_{k-1}(s', t')) ds' dt' + \\ (40'') \quad &+ |A_{k+1}(s) - A_k(s)| \\ &\leq \frac{1}{4} \cdot C \cdot \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} \mathfrak{Y}_{k-1} + \frac{1}{2} R_k(s, s) \end{aligned}$$

oder, da nach (41) stets  $l(s,s) \leq l(s,t)$ , also auch stets  $R_k(s,s) \leq R_k(s,t)$

$$(40^*) \quad |G_{k+1}(s,t) - G_k(s,t)| \leq \frac{1}{2}R_k(s,t) + \frac{1}{2}R_k(s,t) = R_k(s,t),$$

also (40) für  $m = k$ .

Um nun (38) und (39) für  $d < s \leq d+\eta$  zu erfüllen, beachte man, daß auf Grund der Wahl von  $x_0$  (S. 62 oben) und wegen (39\*)

$$|A_{k+1}(c) - A_k(c)| \leq \frac{1}{2}R_k(c,c) \leq \frac{1}{2}R_k(d,d);$$

außerdem ist dort nach Induktionsvoraussetzung  $A_k(s)$  stückweise linear.

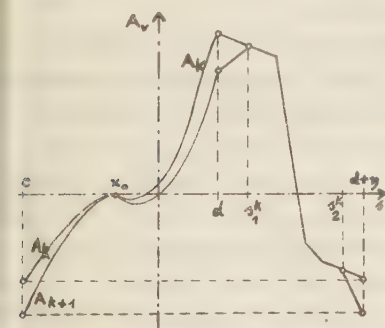


Fig. 14

Verbindet man nun (vgl. Fig. 14) den Punkt  $(d, A_{k+1}(d))$ , der nach

(39\*) noch im zulässigen Bereich

liegt, durch eine Strecke mit der Mitte der ersten Strecke des Streckenzuges  $A_k$  nach  $s=d$

(diese Mitte liege bei  $s=s_1^k$ ), so nehmen die vertikalen Abstände zwischen dieser neu gezogenen Strecke und der von  $A_k$  monoton ab, wenn  $s$  von  $d$  nach  $s_1^k$  wandert,

d.h. man kann  $A_{k+1}(s)$  zwischen  $d$  und  $s_1^k$  durch die Ordinaten dieser von  $(d, A_{k+1}(d))$  ausgehenden Strecke definieren, ohne (39) zu verletzen ( $l(s,s)$  nimmt zwischen  $d$  und  $s_1^k$  ja monoton zu!). Ebenso verbindet man den Punkt  $(d+\eta, A_{k+1}(c))$  mit der Mitte des letzten Streckenzuges von  $A_k$  vor  $d+\eta$  (die  $s$ -Koordinate dieser Mitte sei  $s_2^k$ ,  $s_2^k = s_1^k$  ist möglich) durch eine Strecke und setzt als Werte von  $A_{k+1}$  auf dem Intervall  $[s_2^k, d+\eta]$  die Ordinaten der entsprechenden Punkte dieser letzteren Strecke fest. Da bei dieser Festsetzung die Abstände übereinanderliegender Punkte von  $A_k$  und  $A_{k+1}$  monoton zunehmen, wenn  $s$  von  $s_2^k$  nach  $d+\eta$  läuft, und da im Endpunkt  $s = d+\eta$

$$|A_{k+1}(d+\eta) - A_k(d+\eta)| = |A_{k+1}(c) - A_k(c)| \leq \frac{1}{2}R_k(d,d)$$

(vgl. oben), hat man also für  $s_2^k \leq s \leq d+\eta$

$$|A_{k+1}(s) - A_k(s)| \leq |A_{k+1}(d+\eta) - A_k(d+\eta)| \leq \frac{1}{2}R_k(d,d) \leq \frac{1}{2}R_k(s,s)$$

d.h. (39) gilt auch in diesem Bereich.

Für  $s_1^k < s < s_2^k$  kann man aber  $A_{k+1}(s) := A_k(s)$  setzen, das so definierte  $A_{k+1}(s)$  erfüllt dann im ganzen Intervall  $[c, d]$  die Ungleichung (39), es ist dort stückweise linear, setzt  $A_{k+1}(s)$  stetig fort und erfüllt  $A_{k+1}(d+\eta) = A_{k+1}(c)$ .

(38) und (39) sind also auch für  $m = k$  durch ein stetiges periodisches  $A_{k+1}$  erfüllbar.

Damit ist dann durch (37) die Funktion  $G_{k+1}(s, t)$  auf ganz  $\bar{B}$  definiert und stetig ( $H_{k+1}(s, t)$  ist es).

Dieses  $G_{k+1}(s, t)$  erfüllt die Ungleichung (40) auch noch für  $d < s \leq d+\eta$ ,  $(s, t)$  aus  $\bar{B}$ , da die in (40') durchgeführte Abschätzung von  $\iint |a(G_k - G_{k-1})| ds dt'$  auch für solche  $(s, t)$  richtig bleibt und da nach dem soeben Bewiesenen über  $A_{k+1}$  die für (40') verwendete Ungleichung (39') für solche  $s$  ebenfalls noch gilt.

Jetzt ist nur noch die Periodizität (36) von  $G_{k+1}(s, t)$  zu beweisen:

Nach Induktionsannahme ist  $G_k(s-T, t+T) = G_k(s, t)$ , für die Funktion  $a(\frac{s+t}{2})$  gilt eine analoge Gleichung, also hat auch  $L_k(s, t) := a(\frac{s+t}{2}) \cdot G_k(s, t)$  diese Periodizitätseigenschaft.

Da nun der Übergang  $(s', t') \rightarrow (s' - T, t' + T)$  eine Parallelverschiebung in Richtung von  $s+t=2x_0$  bedeutet, gilt

$$\begin{aligned} H_{k+1}(s-T, t+T) &= \iint_{b(s-T, t+T)} L_k(s', t') ds' dt' = \\ &= \iint_{b(s, t)} L_k(s'-T, t'+T) ds' dt' = H_{k+1}(s, t) \end{aligned}$$

d.h.  $H_{k+1}$  und damit auch  $G_{k+1}$  sind ebenfalls periodisch

$$(36'') \quad G_{k+1}(s-T, t+T) = G_{k+1}(s, t) \quad , \quad A_{k+1}(s+T) = A_{k+1}(s) \\ \text{auf } \bar{B} \quad \text{bzw. } R.$$

Die Aussagen (37) mit (40) sind somit für jedes ganze  $m > 0$  erfüllbar.

Wegen (39), (40) und auf Grund ihrer Periodizität bilden  $A_m(s)$  und  $G_m(s,t)$  daher im ganzen Streifen  $\bar{B}$  bzw. auf der ganzen reellen Achse eine gleichmäßig konvergente Fundamentalsfolge, die Grenzfunktionen  $A(s)$  und  $G(s,t)$  sind deshalb auf  $\bar{B}$  bzw.  $R$  definiert, komplexwertig, stetig, periodisch im Sinne (36'), und Lösung von <sup>51</sup>

$$\begin{aligned} c') \quad G(s,t) &= U_0(s) - A(s) + \frac{1}{4} \iint_{\substack{s',t' \\ s(s',t')}} a\left(\frac{s+t'}{2}\right) G(s',t') ds dt' \\ &= U(s) + \frac{1}{4} H(s,t) \end{aligned}$$

mit  $A(s) = H(s,s)$  für  $c \leq s \leq d$ , sodaß man  $G(s,s) = U_0(s) = f(s)$  dort hat.

Da dieses  $G(s,t)$  somit alle an es gestellten Anforderungen erfüllt, ist der Hilfssatz und damit auch Satz 10.1 bewiesen.

Satz 10.1 gestattet noch eine bemerkenswerte Verschärfung: Nach dem obigen Beweis gibt es zu jedem auf  $I$  gleichmäßig stetigen  $f(x)$  sogar ein fastperiodisches  $F_T$  aus  $\mathcal{F}$  mit der Periode  $T = d - c + \eta$ , wo  $\eta$  beliebig positiv gewählt werden kann <sup>52</sup>. Betrachtet man nun die Menge  $\mathcal{F}_T$  aller fastperiodischen Elemente von  $\mathcal{F}$ , die (gleichgradig in  $x$  aus  $I$ ) in  $y$  die Periode  $T$  haben, so ist  $\mathcal{F}_T$  ein abgeschlossener invarianter Modul von  $\mathcal{F}$ , der nach Satz 3.3 aufgespannt wird von seinen invarianten eindimensionalen Teilmoduln, d.h. alle  $F$  aus  $\mathcal{F}_T$  können gleichmäßig auf  $P$  beliebig genau durch endliche Linearkombinationen von Funktionen  $F_{\omega_v}$  approximiert werden, wo

$$F_{\omega_v}(x,y) = h_{\omega_v}(x) \cdot e^{i4y} \quad \text{und} \quad \omega_v := \frac{2\pi v}{T} \quad (v \text{ ganzzahlig } = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Jedes  $f$  läßt sich also gleichmäßig auf  $I$  beliebig genau durch endliche Linearkombinationen von Funktionen  $h_{\omega_v}(x)$  approximieren.

Satz 10.1' Unter den Voraussetzungen des Satzes 10.1 gilt sogar

c') Jedes auf  $I = \{c, d\}$  gleichmäßig stetige  $f(x)$  läßt sich dort gleichmäßig beliebig genau durch endliche Summen von Funktionen der Form  $h_{\omega_v}(x)$  annähern, wo  $\omega_v := \frac{2\pi v}{T}$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$ ;  $T > d - c$ , bel. <sup>84</sup>  
 $T$  fest.

Die für die Approximation stetiger  $f(x)$  nötigen  $h_{\omega}(x)$  kann man also schon aus abzählbar vielen  $h_{\omega_v}(x)$  auswählen, überdies kann man die  $h_{\omega_v}(x)$  (durch die Wahl von  $T$ ) in gewissem Sinne vorschreiben.

Beispiele solcher Approximationssätze, die durch Spezialisierung von  $a(x)$ ,  $I$  und  $T$  erhalten werden, finden sich in § 11.

Eine einfache Folgerung von Satz 10.1\* ist

Satz 10.2 Die  $h_{\omega_v}(x)$  ( $v$  nicht-negativ ganz) trennen  $I$ , d.h. zu vorgegebenen  $x_1, x_2$  aus  $I$  gibt es ein  $v = v(x_1, x_2)$ , sodaß  $h_{\omega_v}(x_1) \neq h_{\omega_v}(x_2)$

(dabei ist  $\omega_v$  wie in Satz 10.1\* definiert,  $T$  ebenso, beliebig, fest; im übrigen gelten die Voraussetzungen von Satz 10.1).

Bei genaueren Überlegungen erhält man etwas mehr; es gibt nämlich sogar (bei vorgegebenem  $T$ ) zu jedem System  $x_1, \dots, x_m$  aus  $I$  und komplexen Zahlen  $h_1, \dots, h_m$  eine Linearkombination  $k(x)$  von  $m$  Funktionen  $h_{\omega_{v_1}}(x), \dots, h_{\omega_{v_m}}(x)$  ( $v_1, \dots, v_m$  ganz  $\geq 0$ ), sodaß  $k(x_\mu) = h_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ),

doch soll auf den Beweis hier nicht eingegangen werden (vgl. Anhang II, 6).

Dieses Ergebnis legt die Frage nahe, ob nicht Satz 10.1 eine Folgerung des Weierstraß-Stoneschen Approximationssatzes ist (vgl. z.B. Maak (11), § 2).

Es scheint dies nicht der Fall zu sein, denn zu einer derartigen Ableitung müßte man, da es sich um Linearkombinationen der  $h_{\omega}(x)$ , nicht um Polynome handelt, den Weierstraß-Stoneschen Approximationssatz in einer Formulierung verwenden, wie sie sich z.B. bei Bourbaki (2), § 5, prop. 2 bzw. théorème 2, S. 53/54, findet; dabei wird aber vorausgesetzt, daß die Funktionsmenge  $H$ , die den zugrundeliegenden Raum  $M$  (hier wäre  $M=I$ ) trennt im Sinne von Satz 10.2, und durch deren lineare Hülle alle stetigen Funktionen auf  $M$  approximiert

werden, mit  $f$  und  $g$  auch  $k(x) := \max(f(x), g(x))$  und  $l(x) := \min(f(x), g(x))$  (prop. 2) bzw.  $|f|$  sowie die Konstanten enthält (th. 2), was im vorliegenden Fall i.a. nicht der Fall ist. Weiter müßte man bei einem derartigen Vorgehen noch die Trenneigenschaft (Satz 10.2) direkt beweisen, was zwar möglich, aber nicht ganz trivial ist; schließlich ist nicht ersichtlich, wie die bei Bourbaki nur für reellwertige Funktionen formulierten Approximationssätze ins Komplexe zu übertragen sind (die Sätze in Maak (11) ergeben nur Approximation durch Polynome).

Zum Abschluß noch eine Folgerung aus der beim Beweis von Satz 10.1 erhaltenen Abschätzung (40): Danach wird

$$\begin{aligned} \|F\|_1 &= \sup_{(x,y) \in P} |F(x,y)| = \sup_{(s,t) \in B} |G(s,t)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sup |G_{m+1} - G_m| \leq \\ &\leq C \cdot e^{A \cdot \sup l(s,t)} =: C \cdot K ; \end{aligned}$$

für  $\sup l(s,t)$  erhält man die Abschätzung

$$\sup_{\substack{c \leq s \leq d \\ (s,t) \in B}} l(s,t) \leq T + d - c$$

sodaß man schließlich bekommt

$$(43) \quad \sup_{x \in I} |f(x)| \leq \|f\|_1 = \inf_{F_f} \|F_f\|_1 \leq K \cdot \sup_{x \in I} |f(x)|$$

mit einem  $K$ , das nur von  $a(x)$ ,  $I$  und  $\eta$  bzw.  $T$  abhängt, jedoch unabhängig von  $f(x)$  ist:

Satz 10.3 Die in § 7, Definition 7 eingeführte Topologie ist unter den Voraussetzungen des Satzes 10.1 <sup>53</sup> äquivalent mit der gewöhnlichen Supremum-Topologie in  $\mathcal{L}_I^\infty$  <sup>54</sup>.

§ 11

Beispiele

1)  $a(x) \equiv 0$ ,  $I = (-\infty, +\infty)$ ,  $g(x) \equiv 1$

Nach Satz 8.2 sind hier die 0-fastperiodischen Funktionen genau die Bohr-fastperiodischen Funktionen (vgl. auch § 6, Beispiel 1). Satz 8.1 ergibt in dem vorliegenden Fall den Approximationssatz für Bohr-fastperiodische Funktionen, da die  $h_\omega(x)$  von der Form  $e^{\pm i\omega x}$  sind. Das  $f(x)$  zugeordnete gerade  $F_f$  hat das Aussehen

$$F_f(x, y) = \frac{1}{2}(f(x-y) + f(x+y))$$

denn nach Satz 2.4 muß  $U(s)=V(s)$  sein, also  $F(x, y)=U(x-y) + U(x+y)$ ,  $y = 0$  ergibt dann die Behauptung (die auch aus dem Eindeutigkeitssatz in Anhang III, 10) folgt).

Die in § 9 eingeführte Fourierreihe von  $f(x)$  sieht nach § 6, Beispiel 1), (30) so aus

$$(44) \quad f(x) \sim \sum \frac{1}{2}(a_{-\omega}e^{-i\omega x} + a_{\omega}e^{i\omega x})$$

$$\text{wo} \quad a_{\omega} = M_x(f(x)e^{-i\omega x}) \quad ,$$

d.h. bis auf die beim ersten Summationsglied gespiegelte Reihenfolge die gewöhnliche Bohrsche Fourierreihe.

Setzt man, wie es häufig geschieht,

$$\alpha_{\omega} := M_x(f(x) \cdot \cos \omega x) \quad , \quad \beta_{\omega} := M_x(f(x) \cdot \sin \omega x) \quad ,$$

so nimmt (44) die Form

$$(45) \quad f(x) \sim \sum_{\omega} (\alpha_{\omega} \cos \omega x + \beta_{\omega} \sin \omega x)$$

an, sie stimmt dann genau mit der üblichen Fourierreihe überein.

In diesem Beispiel approximieren also die endlichen Abschnitte der Fourierreihe  $f(x)$  im quadratischen Mittel, die Fejér-Summen approximieren  $f(x)$  sogar gleichmäßig.

2)  $a(x) \equiv 0$ ,  $I = [0, 1]$ ,  $g(x) \equiv 1$

Nach Satz 10.1' ist jede auf  $I$  definierte, stetige Funktion dort 0-fastperiodisch und läßt sich auf  $I$  gleichmäßig

beliebig genau durch endliche Summen der Form

$$\sum a_v e^{i(2\pi v x)/(1+\eta)} \quad (v \text{ ganzzahlig})$$

approximieren ( $\eta > 0$ , sonst beliebig, fest; i.w. ist dies der Weierstraßsche Approximationssatz!)

Als Fourierreihe erhält man, wenn man genauso wie in Beispiel 1) vorgeht (es sind noch andere  $F_f$  und damit andere Fourierreihen möglich, da  $I$  endlich ist), ganz dieselben Reihen (44) bzw. (45), wobei jetzt

$$a_\omega = \frac{1}{1+\eta} \int_0^{1+\eta} f(x) e^{-i\omega x} dx = \alpha_\omega - i\beta_\omega$$

und  $\omega$  die Folge  $2\pi v/(1+\eta)$  ( $v$  ganzzahlig) durchläuft sowie  $f(x)$  zwischen 1 und  $1+\eta$  stetig (z.B. linear) so erklärt ist, daß  $f(1+\eta) = f(0)$ .

Diese Fourierreihe hat dieselben Konvergenzeigenschaften wie in Beispiel 1). Für  $\eta \rightarrow 0$  konvergieren die  $a_\omega$  bzw.  $\alpha_\omega, \beta_\omega$  gleichgradig gegen die gewöhnlichen Fourierkoeffizienten von  $f(x)$ .

$$3) \quad a(x) = -x, \quad g(x) \equiv 1$$

Satz 10.1' ergibt hier in Verbindung mit Beispiel 3) von § 6:

Jede auf einem kompakten Intervall  $I_1$  von  $[0, \infty)$  <sup>55</sup> definierte, stetige komplexwertige Funktion läßt sich dort gleichmäßig beliebig genau durch endliche Linearkombinationen (mit komplexen Koeffizienten) von Funktionen

$$k_1(x+lv^2), \quad k_2(x+lv^2) \quad (v = 0, 1, 2, \dots)$$

approximieren. Dabei ist  $l := (2\pi/T)^2$ ,  $T$  größer als die Länge von  $I_1$ , sonst beliebig, fest, und

$$k_1(t) := \sqrt{t} \cdot J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \right), \quad k_2(t) := \sqrt{t} \cdot N_{1/3} \left( \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \right).$$

Jedes stetige  $f(x)$  läßt sich auf kompaktem  $I_1$  also aus den translatierten Funktionen zweier fester Funktionen aufbauen.

4)  $a(x) = \frac{k}{x^2}$ ,  $I$  aus  $(0, +\infty)$ ,  $k$  komplex <sup>56</sup>

Jede  $(k/x^2)$ -fastperiodische Funktion läßt sich beliebig genau  $\varphi$ -gleichmäßig auf  $I$  durch endliche Linearkombinationen von Funktionen  $k_1(\omega x)$ ,  $k_2(\omega x)$  ( $\omega$  reell  $\geq 0$ ) approximieren ( $k_1$  und  $k_2$  übernehmen dabei die Rolle von  $\sin$  und  $\cos$  des Bohrschen Falles!); hierbei ist

$$k_1(x) := \sqrt{x} \cdot J_{\sqrt{k+1}/4}(x) \quad , \quad k_2(x) := \sqrt{x} \cdot N_{\sqrt{k+1}/4}(x)$$

und  $\sup_{x \in I} |\varphi(x) k_v(x)| < \infty$  (wegen der eventuellen Beschränkung auf  $k_1(x)$  je nach Wahl von  $I$  und  $\varphi$  vgl. § 6).

Ist speziell  $I$  kompakt, so erhält man (für  $\varphi(x) \equiv 1$ ,  $l := \frac{2\pi}{T}$ )

Jede auf  $I$  stetige Funktion läßt sich gleichmäßig beliebig genau durch endliche Linearkombinationen von Funktionen

$$k_1(lvx) \quad \text{und} \quad k_2(lvx) \quad (v = 0, 1, 2, \dots)$$

approximieren, d.h. durch die "Grund- und Oberwellen" zweier fester Funktionen.

Da ein kompaktes  $I$  von 0 positiven Abstand hat, und da auf einem solchen  $I$   $\varphi(x)$  beschränkt ist und ebenfalls positiven Abstand von 0 bewahrt, kann man für diesen Fall in der Definition für  $k_1$  und  $k_2$  den Ausdruck  $\sqrt{x}$  auch weglassen, sodaß man auf solchen  $I$  stetige Funktionen auch direkt durch Grund- und Oberwellen von zwei festen Zylinderfunktionen annähern kann.

Unter die  $(k/x^2)$ -fastperiodischen Funktionen fallen nun auch die von Delsartre (3) untersuchten Funktionenklassen: Delsartre nennt (vgl. § 6, Beispiel 4)) eine gerade stetige Funktion  $g(r)$ , die auf  $(-\infty, +\infty)$  definiert ist <sup>57</sup>, "J-fastperiodisch von I. bzw. II. Art", wenn es eine verallgemeinerte Lösung der Differentialgleichung

$$\phi_{rr}'' + \frac{2p+1}{r} \phi_r' = \phi_{tt}'' \quad , \quad p \text{ fest reell, } |p| < \frac{1}{2}$$

gibt, die (gleichgradig in  $r \in \mathbb{R}$ ) in  $t$  Bohrfastperiodisch ist und die den Anfangsbedingungen

$$\phi(r,0) = 0, \quad \phi_t'(r,0) = g(r) \text{ beschränkt}$$

$$\phi(r,0) = g(r), \quad \phi_t'(r,0) = 0$$

genügt.

"Verallgemeinerte Lösung" ist dabei in (3) so definiert:  
Für zweimal stetig differenzierbare  $g(r)$  gibt es gewisse  
Integraldarstellungen für zu obigen Anfangsbedingungen I. oder  
II. Art gehörige Lösungen der behandelten hyperbolischen Dif-  
ferentialgleichung<sup>58</sup>; diese Integraldarstellungen werden dann  
zur Definition erhoben, auch wenn  $g(r)$  und damit  $(r,t)$  nur  
stetig sind ((3), S. 293 z.B.).

Weiter nennt Delsartre eine Funktion  $g(r)$  "absolut J-fast-  
periodisch", wenn sie J-f.p. von I. und von II. Art ist.

Die zugehörigen  $\phi(r,t)$  sind dabei stets auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  beschränkt.

Zunächst sieht man mit den Ergebnissen von § 6, Beispiel 4),  
S. 49 sofort, daß eine Funktion, die nach einer dieser drei  
Definitionen J-fastperiodisch ist, auch  $(k/x^2)$ -fastperiodisch  
ist<sup>59</sup> (für  $k = (4p^2 - 1)/4$ ,  $g(x) = x^{-(2p+1)/2}$ ,  $I = (0, +\infty)$ )  
(das Umgekehrte gilt nicht<sup>59\*</sup>).

Die Funktionen, die bei Delsartre die Rolle der  $e^{i\omega y}$  über-  
nehmen (d.h. mit denen eine Fourierreihe gebildet werden kann  
und durch deren lineare Hülle die J-f.p.  $g(r)$  gleichmäßig  
approximiert werden können), sind bis auf einen konstanten  
Faktor die Funktionen

$$\frac{1}{r^p} J_p(\omega r) \quad (\omega \text{ reell}) \quad .$$

Das sind aber im Fall  $p > 0$ <sup>60</sup> genau die Funktionen, die ge-  
mäß der in § 6, Beispiel 4) angegebenen Beziehung zwischen  $\phi$   
und  $F$  aus den dortigen elementaren Funktionen  $\sqrt{x} J_p(\omega x)$   
entstehen.

Nach Satz 8.1 läßt sich das einem J-fastperiodischen  $g(r)$   
zugeordnete  $f(x)$  beliebig genau  $\varphi$ -gleichmäßig auf  $I = (0, +\infty)$   
durch endliche Linearkombinationen von Funktionen  $\sqrt{x} J_p(\omega x)$   
approximieren; zieht man hier die Normfunktion  $\varphi(x)$  zu  $f(x)$   
und zu den approximierenden Linearkombinationen, und setzt  
noch  $x=r$ , so wird  $\varphi(x)f(x)$  zu  $g(r)$ , die approximierenden

Ausdrücke werden zu Linearkombinationen der  $r^{-p}_{J_p}(\omega r)$ , wie sie Delsartre betrachtet; man erhält so, daß jedes  $g(r)$ , das im Sinne einer der drei obigen Definitionen von Delsartre  $J$ -fastperiodisch ist, auch auf  $(-\infty, +\infty)$  ( $g(r)$  und die Approximationsausdrücke sind gerade und stetig in  $r=0$  !) beliebig genau gleichmäßig durch solche Linearkombinationen approximierbar ist - ein Ergebnis, das die Sätze von Delsartre noch umfaßt (Delsartre hat solche Approximationssätze nur für absolut  $J$ -fastperiodische Funktionen und  $J$ -fastperiodische Funktionen II. Art bewiesen).

Nebenbei erhält man damit noch, daß  $J$ -fastperiodische Funktionen für  $r \rightarrow \infty$  stets gegen 0 gehen (denndie elementaren Funktionen tun dies).

Konstante sind i.a. also nicht  $a$ -fastperiodisch!

5)  $a(x) = -e^{2x}$ , I aus  $(-\infty, +\infty)$

Setzt man  $k_{1,v}(x) := J_{1lv}(e^x)$ ,  $k_{2,v}(x) := N_{1lv}(e^x)$ ,

$l := 2\pi/T$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$ ,

so lautet Satz 10.1' für kompaktes I:

Jede auf I stetige Funktion läßt sich dort gleichmäßig beliebig genau durch endliche Linearkombinationen der  $k_{1,v}(x)$  und  $k_{2,v}(x)$  approximieren.

Die Abhängigkeit der  $k_{1,v}$  und  $k_{2,v}$  von  $v$  läßt sich hier nicht so einfach formulieren wie bei den vorangegangenen Beispielen. Jedoch kann man (ähnlich wie in Beispiel 4), wo man den Faktor  $\sqrt{x}$  weglassen konnte) durch eine passende  $x$ -Transformation erreichen, daß im Argument der verwendeten Zylinderfunktionen statt  $e^x$  nur mehr  $x$  steht, d.h. daß die Approximation auch durch Linearkombinationen von  $J_{1lv}(x)$  und  $N_{1lv}(x)$  möglich ist. <sup>61</sup>

## Anhang I      Einige Sätze der Maßtheorie

In diesem Abschnitt werden einige Tatsachen über Lebesgue-integrierbare Funktionen zusammengestellt (ohne Beweis), die in den üblichen Lehrbüchern nicht immer zu finden sind.

Die Beweise lassen sich nach den in der Maßtheorie üblichen Schlußweisen durchführen (vgl. z.B. Halmos (4)).

Die vorkommenden Funktionen sind definiert entweder auf einem beliebigen Intervall  $I$  der reellen Zahlengeraden  $\mathbb{R}$  oder auf einem Streifen  $B$  des reellen  $\mathbb{R}^2$ , sie sind komplexwertig. Als Maß wird das gewöhnliche Lebesguesche Maß  $\mu$  verwendet. Solche komplexwertigen Funktionen  $f$  heißen meßbar bzw. integrierbar, falls  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  meßbar bzw. über die in Frage kommenden Mengen integrierbar sind; man setzt in letzterem Falle

$$\int f d\mu := \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu.$$

Alle in der vorliegenden Arbeit verwendeten Sätze der Maßtheorie gelten auch für solche Funktionen.

- 1) Ist  $f$  oder  $|f|$  über  $M$  integrierbar, so sind es beide und es gilt
- $$\left| \int_M f d\mu \right| \leq \int_M |f| d\mu.$$

Diese Ungleichung ist nicht so elementar wie für reellwertige  $f$ , für die sie gewöhnlich bewiesen wird, sie besagt ja genauer

$$\left( \left( \operatorname{Re} \int f d\mu \right)^2 + \left( \operatorname{Im} \int f d\mu \right)^2 \right)^{1/2} \leq \int \left( (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 \right)^{1/2} d\mu.$$

Eine derartige Ungleichung gilt allgemein für Funktionen  $f(x)$ , deren Werte Punkte eines reellen endlich-dimensionalen Raumes  $\mathbb{R}^m$  sind, außerdem darf man statt "2" überall ein beliebiges reelles  $p > 1$  setzen.

- 2) Ist  $f(x)$  über  $I$  integrabel, so gibt es zu jedem positiven  $\varepsilon$  ein positives  $\delta$ , sodaß für  $-\delta < \tau < \delta$

$$\int_I |f(x) - f(x+\tau)| d\mu < \varepsilon$$

(wo hier  $f(x+\tau)$  nicht definiert sein sollte, setze man es gleich 0).

$T_f$  ist also in der Normtopologie  $\|f\| := \int |f| d\mu$  stetig.

Auch dieser Satz gilt allgemeiner, er ist nämlich auch dann noch richtig, wenn der Definitionsbereich  $I$  von  $f$  aus einer lokalkompakten Gruppe ist und  $\mu$  das Haarsche Maß bedeutet.

- 3) Ist  $f(x)$  auf  $I$  totalstetig (s.u.), so existiert  $f'(x)$  f.ü. auf  $I$ ,  $f'(x)$  ist integrabel und es gilt für  $x_1, x_2$  aus  $I$

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(t) d\mu = f(x_2) - f(x_1).$$

Ist umgekehrt  $g(x)$  über  $I$  integrabel, so ist  $(x, x_1 \in I)$

$$f(x) := \int_{x_1}^x g(t) d\mu$$

auf  $I$  totalstetig und es gilt f.ü. auf  $I$   $f'(x) = g(x)$ .

Dabei heißt eine Funktion  $f(x)$  auf dem beliebigen (endlichen oder unendlichen, offenen, halboffenen oder abgeschlossenen) Intervall  $I$  totalstetig, wenn es zu jedem positiven  $\varepsilon$  ein positives  $\delta$  und ein positives  $T$  gibt, sodaß für alle Systeme von endlich vielen, getrennt liegenden abgeschlossenen Intervallen  $i_v := [x_v', x_v'']$  aus  $I$  ( $v = 0, 1, \dots, k$ ), für die

$$\sum_{v=1}^k |i_v| := \sum_{v=1}^k (x_v'' - x_v') < \delta \quad \text{und} \quad x_0' > T, x_0'' > T,$$

die Schwankungssumme

$$\sum_{v=0}^k |f(x_v'') - f(x_v')| < \varepsilon.$$

(Im Falle eines kompakten  $I$  deckt sich diese Definition mit der üblichen - vgl. Kamke (7), S. 169; dort werden auch für kompakte  $I$  und reellwertige  $f$  obige Beziehungen zwischen  $f$  und  $f'$  bewiesen (Satz 2 - Satz 4, S. 167 - 171) :)

Ist  $f(x)$  auf  $I$  definiert, komplexwertig und meßbar, über jedes kompakte Teilintervall von  $I$  integrabel, ist weiter  $0$  aus  $\bar{I}$  (d.h.  $0$  ist aus  $I$  oder Randpunkt von  $I$ ), und gilt für alle  $x_1, x_2$ , für die  $x_1, x_2, x_1+x_2$  aus  $I$ ,

$$f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad ,$$

so hat  $f(x)$  auf  $I$  die Gestalt

$$f(x) = e^{kx} \quad (k \text{ komplex}) \quad .$$

(Der Beweis verläuft analog wie bei Maak (9), S. 71.)

## Anhang II Über die Lösungen der Differentialgleichung

$$h''(x) - (a(x) - \omega^2) \cdot h(x) = 0$$

Sei  $I$  ein beliebiges Intervall der reellen Zahlengeraden,  $b(x)$  auf  $I$  definiert, komplexwertig, meßbar und lokal integrierbar (vgl. § 1).

Unter einer Lösung  $h(x)$  der Differentialgleichung  
(A)  $h''(x) = b(x) \cdot h(x)$

werde dann eine auf ganz  $I$  definierte, komplexwertige Funktion verstanden, die auf  $I$  einmal differenzierbar ist, für die dort  $h'(x)$  lokal totalstetig ist (vgl. Anhang I, 3)), sodaß also  $h''(x)$  f.ü. auf  $I$  existiert, und für die f.ü. <sup>62</sup> (A) gilt.

- 1) Ist  $h(x)$  Lösung von (A), und ist  $b(x)$  im Punkte  $x_1$  aus  $I$  stetig, so existiert  $h''(x_1)$  und es gilt (A) für  $x=x_1$ .

Beweis: Nach Anhang I, 3) gilt für  $x, x_1$  aus  $I$

$$h'(x) - h'(x_1) = \int_{x_1}^x h''(t) dt = \int_{x_1}^x b(t) h(t) dt ; \text{ daraus folgt die Behauptung.}$$

Da bei auf  $I$  stetigem  $b(x)$   $h'(x)$  stetig differenzierbar ist, also sicher lokal totalstetig ist, deckt sich der hier eingeführte Lösungsbegriff für stetige  $b(x)$  mit dem üblichen.

- 2) Die Menge der Lösungen von (A) bildet einen linearen komplexen Vektorraum  $L_b$  der Dimension 2. Zu jeder Anfangsbedingung  $h(x_0) = h_0, h'(x_0) = h'_0$  ( $h_0, h'_0$  beliebig komplex) gibt es genau ein  $h(x)$  aus  $L_b$ . Jedes  $h(x)$  läßt sich also (z.B.) eindeutig darstellen in der Form  $h_0 h_1(x) + h'_0 h_2(x)$ , wo  $h_1(x)$  zu den Anfangsbedingungen  $h(x_0)=1, h'(x_0)=0$ ,  $h_2(x)$  zu  $h(x_0)=0, h'(x_0)=1$  gehören.

Zum Beweis wird (A) zunächst in die nach Anhang I, 3)

gleichwertige Integralgleichung

$$h(x) - h(x_0) = (x-x_0)h'(x_0) + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x'} b(x'')h(x'')dx''dx'$$

reformiert. Für den Existenznachweis kann man dann die übliche Iterationsmethode anwenden, die, obwohl  $b(x)$  nicht beschränkt sein braucht, wegen des vorkommenden Doppelintegrals trotzdem noch zu konvergenten Folgen führt. Nach derselben Methode läßt sich auch die Eindeutigkeitsaussage beweisen, die übrigen Aussagen sind dann trivial.

Obenbei ergibt sich aus der bei der Iteration gewonnenen Abschätzung von  $h(x)$ , daß jede Lösung von (A) auf einem beschränkten Teilintervall  $I_1$  von  $I$  beschränkt bleibt, wenn nur  $b(x)$  über  $I_1$  integrierbar ist.

Da  $b(x)$  nur als lokal integrierbar vorausgesetzt wurde, braucht  $b(x)$  z.B. auch in inneren Punkten von  $I$  nicht beschränkt zu sein, trotzdem existieren zu allen Anfangsbedingungen eindeutig bestimmte Lösungen  $h(x)$ , die auf ganz  $I$  definiert und einmal stetig differenzierbar sind; in  $\infty$ -Stellen von  $b(x)$  existiert natürlich  $h''(x)$  nicht mehr, jedenfalls existiert  $h'$  aber f.ü. auf  $I$ ; die Integrierbarkeit von  $b(x)$  zieht also gewissermaßen die Lösungen über solche  $\infty$ -Stellen von  $b(x)$  hinweg.

- ) Ist  $b(x) = a(x) - \omega^2$ , so gibt es eine Normfunktion  $\varphi_1(x)$ , die nur von  $a(x)$  und  $I$  abhängt, sodaß für alle Lösungen  $h_\omega(x)$  von (A) für beliebiges reelles  $\omega$  stets

$$\sup_{x \in I} |\varphi_1(x) \cdot h_\omega(x)| < \infty.$$

Beweis: Ist  $h_{\omega_0}(x)$  Lösung von (A) für  $\omega = \omega_0$ ,  $h_\omega(x)$  eine Lösung von (A) für  $\omega$ , die bei  $x_0$  dieselben Anfangsbedingungen erfüllt wie  $h_{\omega_0}(x)$ , so gilt für die Differenz

$$d(x) := h_\omega(x) - h_{\omega_0}(x)$$

$$d''(x) = (a(x) - \omega^2)d(x) + (\omega_0^2 - \omega^2)h_{\omega_0}(x), \quad d(x_0) = d'(x_0) = 0$$

oder äquivalent damit

$$d(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x'} ((a(x'') - \omega^2)d(x'') + (\omega_0^2 - \omega^2)h_{\omega_0}(x''))dx''dx'.$$

Durch iterierte Abschätzung erhält man daraus, analog wie z.B. bei Kamke (5), S. 95 und S. 153, (statt der Beschränktheit von  $a(x)$  reicht wieder wie oben unter 2) die lokale Integrierbarkeit von  $a(x)$  aus)

$$|d(x)| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} |h_{\omega_0}(t)| \cdot |x - x_0|^2 (\omega^2 - \omega_0^2) \cdot \exp(|x - x_0| \cdot (|x - x_0| \omega^2 + \int_{x_0}^x |a(t')| dt'))$$

(auf die genaue Form der rechten Seite kommt es dabei gar nicht so sehr an).

Da  $\omega^2 |x - x_0|^2 \leq \omega^2 + |x - x_0|^2$ , kann man diese Abschätzung in der folgenden Form schreiben:

$$|d(x)| \leq A(x) \cdot B(\omega),$$

wobei  $A$  unabhängig von  $\omega$  und  $B$  unabhängig von  $x$  ist,  $A$  nur von  $a(x)$  und  $h_{\omega_0}(x)$  sowie  $x_0$ ,  $B$  nur von  $\omega_0$  abhängen.

Sei nun  $\omega_0 = 0$ ,

$h_{01}(x), h_{02}(x)$  das in 2) näher definierte linear unabhängige Lösungspaar von (A) für  $\omega = 0$ ,

$$C(x) := |h_{01}(x)| + |h_{02}(x)| + 1$$

$$\varphi_1(x) := (A(x) + C(x))^{-1}.$$

Dann gilt auf  $I$   $0 < \varphi_1(x) \leq 1$ , lokal hat  $\varphi_1(x)$  positiven Abstand von 0 (denn  $A(x)$  und  $C(x)$  sind auf  $I$  stetig, also lokal beschränkt), außerdem ist  $\varphi_1(x)$  sogar stetig.

Ist weiter  $h_{\omega}(x) = h_0 h_{\omega,1}(x) + h_0' h_{\omega,2}(x)$  (vgl. 2))

und  $h_0(x) = h_0 h_{01}(x) + h_0' h_{02}(x)$

das  $h_{\omega}(x)$  zugeordnete  $h_{\omega_0}(x)$  mit denselben Anfangsbedingungen, so gilt für  $d(x) = h_{\omega}(x) - h_0(x)$  die oben erhaltene Abschätzung; also hat man

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) h_{\omega}(x)| &= |\varphi_1(x) (d(x) + h_0(x))| \\ &\leq \varphi_1(x) (A(x) B(\omega) + |h_0| |h_{01}(x)| + |h_0'| |h_{02}(x)|) \\ &\leq B(\omega) + |h_0| + |h_0'| < \infty, \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck unabhängig von  $x$  ist.

q.e.d.

- 4) Ist  $b(x)$  auf  $I$  beschränkt oder über  $I$  integrierbar, und ist  $h(x)$  eine auf  $I$  beschränkte Lösung von (A), so ist auch  $h'(x)$  auf  $I$  beschränkt.

Wenn  $I$  beschränkt ist und  $b(x)$  über  $I$  integrabel ist, so ist nach 2) jede Lösung auf  $I$  beschränkt, also nach dem zu beweisenden Satz dort auch gleichmäßig stetig.

Beweis von 4): Ist  $I$  endlich oder  $\int_I |b(t)| dt < \infty$ , so gilt

$$|h'(x) - h'(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x h''(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x b(t) h(t) dt \right| \leq \sup_I |h| \cdot \int_I |b| dt < \infty.$$

Ist  $I$  unendlich und  $b(x)$  beschränkt, so schließen wir indirekt: Ist  $h'(x)$  nicht beschränkt, so gibt es zu jedem natürlichen  $n$  ein  $x_n$ , sodaß z.B.  $h'(x_n) > n$ ; wegen

$$|h'(x) - h'(x_n)| = \left| \int_{x_n}^x b(t) h(t) dt \right| \leq \sup_I |b \cdot h| \cdot |x - x_n| =: A \cdot |x - x_n|$$

ist dann für  $0 < |x - x_n| \leq \frac{n}{2A}$ ,  $x$  aus  $I$  jedenfalls

$$h'(x) > \frac{n}{2}, \quad \text{dort also} \quad |h(x) - h(x_n)| \geq \frac{n}{2} \cdot |x - x_n|;$$

durch passende Wahl von  $x$  kann man daher erreichen, daß

$$|h(x) - h(x_n)| \geq \frac{n^2}{4A}, \quad \text{d.h. } h(x) \text{ ist nicht beschränkt.}$$

5) Ist  $I$  beschränkt und  $a(x)$  über  $I = [c, d]$  integrabel, so läßt sich jedes auf  $I$  gleichmäßig stetige  $f(x)$  (und nur solche) dort gleichmäßig beliebig genau durch endliche Summen der Form  $\sum_m h \omega_m(x)$  approximieren. Dabei ist  $\omega_m := 2\pi m/T$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $T > d - c$ , sonst bel., aber fest sowie  $h \omega_m(x)$  eine Lösung von (A) für  $b = a(x) - \omega^2$ .

Der Beweis hierfür wurde in § 10 geführt.

6) Aus 5) kann man mit den dortigen Bezeichnungen ableiten:

Ist  $I$  beliebig (auch unendlich),  $a(x)$  auf  $I$  lokal integrabel, so gibt es zu vorgegebenen  $x_1, \dots, x_m$  aus  $I$  und komplexen Zahlen  $h_1, \dots, h_m$  eine Linearkombination  $k(x)$  von  $m$  Funktionen  $h_{\omega_{\mu_1}}(x), \dots, h_{\omega_{\mu_m}}(x)$ , sodaß

$$k(x_v) = h_v \quad (v = 1, \dots, m).$$

Insbesondere trennen also die  $h_r(x)$ ,  $r$  rational positiv, stets das Intervall  $I$ .

Dem Beweise von 6) liegt ein allgemeinerer Satz zugrunde:

Ist  $X$  eine beliebige Menge und  $H$  ein System von Funktionen  $h(x)$ , die auf  $X$  definiert sind und ihre Werte in einem Körper  $K$  haben, und ist weiter  $H$  so beschaffen, daß es zu beliebig vorgegebenen  $x_1, \dots, x_m$  aus  $X$  und  $a_1, \dots, a_m$  aus  $K$  stets ein  $h(x)$  aus der linearen Hülle von  $H$  gibt, sodaß <sup>63</sup>

$$\sum_{v=1}^m a_v h(x_v) \neq 0,$$

so gibt es zu solchen  $x_v$  und  $a_v$  auch ein  $h(x)$  aus der linearen Hülle von  $H$  sodaß

$$h(x_v) = a_v \quad (v = 1, 2, \dots, m).$$

Um damit 6) zu beweisen, setzt man  $X :=$  Intervall  $I_1$ , sodaß  $I_1$  alle vorgegebenen  $x_v$  der Voraussetzung von 6) enthält, kompakt und Teilintervall von  $I$  ist;  $H := (h_\omega(x) : \omega = \frac{\pi v}{|I|}, v = 0, 1, 2, \dots)$ . Die Bedingung  $\sum_{v=1}^m a_v h_\omega(x'_v) \neq 0$  für alle Systeme  $a_v$  und  $x'_v$  aus  $I_1$  ist dann sicher erfüllt, denn da es auf  $I_1$  trivialerweise stetige Funktionen  $f(x)$  gibt, für die  $\sum_{v=1}^m a_v f(x_v) \neq 0$ , und da sich nach 5) alle stetigen Funktionen auf  $I_1$  durch die lineare Hülle von  $H$  gleichmäßig annähern lassen <sup>64</sup>, kann nicht für alle  $h_\omega(x)$  aus  $H$   $\sum_{v=1}^m a_v h_\omega(x_v)$  verschwinden.

Eine andere vielleicht erwähnenswerte Folgerung des obigen Satzes ist diese:

Gibt es auf einem topologischen Raum  $X$  zu vorgegebenen endlich vielen Punkten  $x_1, \dots, x_m$  aus  $X$  und komplexen Zahlen  $a_1, \dots, a_m$  stets eine stetige Funktion  $h(x)$ , sodaß für  $v=1, \dots, m$

$$|h(x_v) - a_v| < \frac{\sum |a_v|^2}{\sum |a_v|},$$

so gibt es auf  $X$  auch stetige Funktionen  $h(x)$ , sodaß

$$h(x_v) = a_v \quad (v=1, \dots, m).$$

(Wenn die Punkte  $(x_v, a_v)$  hinreichend genau durch ein stetiges  $h(x)$  erreicht werden - es ist nicht erforderlich, beliebig genau! - so werden sie durch stetige  $h(x)$  auch angenommen.)

Sind die Beträge <sup>65</sup>  $|\omega_1|, \dots, |\omega_m|$  paarweise verschieden, so sind beliebige  $h_{\omega_1}(x), \dots, h_{\omega_m}(x)$ , die nicht identisch verschwinden <sup>66</sup>, linear unabhängig über jedem Teilintervall  $I_0$  von  $I$ .

Insbesondere sind also Funktionen  $h_{\omega_1}, \dots, h_{\omega_m} \neq 0$  linear unabhängig, wenn  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m$ .

Ist weiter eine Summe  $\sum_{v=1}^m a_v h_{\omega_v}(x)$  auf irgend einem Teilintervall von  $I$  identisch 0, so verschwindet sie auf ganz  $I$  <sup>67</sup>.

Beweis: Ist  $\sum_{v=1}^m a_v h_{\omega_v}(x) = 0$  auf  $I_0$ , so ist auch  $\sum_{v=1}^m a_v h_{\omega_v}''(x) = 0$  auf  $I_0$ ; unter Verwendung von (A) folgt daraus

$$\sum_{v=1}^m a_v \omega_v^2 h_{\omega_v}(x) = 0, \text{ zunächst f.ü.; weil die } h_{\omega_v}(x)$$

stetig sind, dann aber auch überall auf  $I_0$ . Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man für beliebiges nicht-negative

ganze  $n$  
$$\sum_{v=1}^m a_v \omega_v^{2n} h_{\omega_v}(x) = 0 \text{ auf } I_0.$$

Sei  $\omega_1$  dasjenige  $\omega_v$  mit dem größten Absolutbetrag, also  $|\frac{\omega_v}{\omega_1}| < 1$  für  $v = 2, \dots, m$ ; dann hat man auch

$$a_1 h_{\omega_1}(x) + \sum_{v=2}^m \left(\frac{\omega_v}{\omega_1}\right)^{2n} a_v h_{\omega_v}(x) = 0.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt dann wegen  $h_{\omega_1}(x) \neq 0$   $a_1 = 0$ .

Mit vollständiger Induktion erhält man so, daß alle  $a_v$  verschwinden müssen, d.h. die  $h_{\omega_v}(x)$  sind über  $I_0$  linear unabhängig.

### Anhang III Verallgemeinerte Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen

Sei  $I$  ein beliebiges<sup>77</sup> Intervall der reellen Zahlengeraden,  $a(x)$  eine auf  $I$  definierte, endlich-komplexwertige und lokal integrable Funktion.

Eine auf  $P := I \times \mathbb{R}$  definierte, endlich-komplexwertige und lokal integrable Funktion  $F(x,y)$  heißt verallgemeinerte Lösung von

$$(1) \quad F''_{xx} - F''_{yy} = a(x) \cdot F$$

wenn auch  $a(x) \cdot F(x,y)$  auf  $P$  lokal integrabel ist und wenn das  $F(x,y)$  zugeordnete  $G(s,t) := F\left(\frac{s+t}{2}, \frac{-s+t}{2}\right)$  auf dem  $P$  entsprechenden  $B$  der Integralgleichung

$$(3) \quad G(s,t) = U(s) + V(t) + \frac{1}{4} \iint_{B(s,t)} a\left(\frac{s'+t'}{2}\right) G(s',t') ds' dt'$$

mit lokal integrablen, endlich komplexwertigen, auf  $\mathbb{R}$  definierten  $U$  und  $V$  genügt.

(Wegen der genaueren Erklärung der vorkommenden Begriffe vgl. § 1, es gelten dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen.)

1) Die Berechtigung einer derartigen Definition ergibt sich aus Satz 1.1 (Unabhängigkeit des Lösungsbegriffes von  $x_0$ ) und Satz 1.2:

Ist  $F(x,y)$  verallgemeinerte Lösung von (1) und in  $(x_1, y_1)$  zweimal stetig differenzierbar, ist außerdem  $a(x)$  in  $x_1$  stetig, so genügt  $F(x,y)$  in  $(x_1, y_1)$  der Gleichung (1); umgekehrt ist jede auf  $P$  zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1) (im üblichen Sinne) verallgemeinerte Lösung von (1).

2)  $\mathcal{J} := \{ F(x,y) : F \text{ ist verallg. Lö. von (1)} \}$  ist ein linearer komplexer Vektorraum, der invariant gegenüber den Translationen  $T_c$  und der Spiegelung  $S$  ist,  $T_c \mathcal{J} = \mathcal{J}$ ,  $S \mathcal{J} = \mathcal{J}$ . Dabei ist  $T_c F(x,y) := F(x, y+c)$  ( $c$  reell),  $S F(x,y) := F(x, -y)$ .

$\mathcal{F} := \frac{1}{2}(\mathcal{F} + S\mathcal{F})$  ist eine (in  $y$ ) gerade Funktion,  $Q$  ist eine Projektion von  $\mathcal{O}$  in  $\mathcal{S}$ .

Der Beweis dieser Behauptungen verläuft analog wie bei Satz 1.3 (gegen  $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{E}$  ist er nicht in dem dortigen enthalten.)

- Ist  $(F_v(x,y))$  eine Folge verallgemeinerter Lösungen von (1), die
- a) lokal auf  $P$  im Mittel konvergieren,
  - b) lokal gleichgradig beschränkt sind und auf  $P$  punktweise konvergieren
  - c) lokal gleichmäßig konvergieren
  - d) auf  $P$  gleichmäßig konvergieren,

so konvergieren die  $F_v(x,y)$  im Sinne a),...bzw. d) gegen ein  $F_\infty(x,y)$ , das auf  $P$  ebenfalls verallgemeinerte Lösung von (1) ist <sup>68</sup>.

Dabei konvergiert eine Funktionenfolge  $(F_v(x,y))$  lokal im Mittel auf  $P$ , wenn es zu jedem Kompaktum  $k$  aus  $P$  und zu jedem positiven  $\epsilon$  ein  $N_{\epsilon,k}$  gibt, sodaß für  $m,n > N$  gilt  $\int_k |F_m - F_n| dx dt < \epsilon$ .

Der Beweis verläuft, unter Verwendung entsprechender Sätze der Maßtheorie, ebenfalls analog dem von Satz 1.3.

Eine auf  $B$  definierte, endlich komplexwertige, lokal integrierbare Funktion  $W(s,t)$  heiße zulässige Anfangsbedingung (für (3)), kurz zulässiges  $W$ , falls auch  $a(\frac{s+t}{2}) \cdot W(s,t)$  auf  $B$  lokal integrierbar ist und falls es auf  $R$  definierte endlich komplexwertige Funktionen  $U(s)$  und  $V(t)$  gibt, sodaß

$$W(s,t) = U(s) + V(t) \quad \text{auf } B.$$

solche  $U(s)$  und  $V(t)$  sind dann stets auf  $R$  lokal integrierbar, ebenso sind die Funktionen  $a(\frac{s+t}{2})U(s)$  und  $a(\frac{s+t}{2})V(t)$  auf  $B$  lokal integrierbar <sup>69</sup>.

Für eine verallgemeinerte Lösung von (1) gemäß (3) zugeordnete  $W(s,t)$  ist stets ein zulässiges  $W$ .

Zulässige  $W$  sind durch obige Darstellung auf ganz  $R \times R$  definiert und lokal integrierbar.

(Die Umformung dieser und der folgenden Aussagen auf  $P$  möge dem Leser überlassen bleiben.)

Ein zulässiges  $W$  läßt sich, bis auf eine additive Konstante, eindeutig darstellen in der Form  $W(s,t) = U(s) + V(t)$ ; genauer, ist  $W = U + V = U_1 + V_1$  auf  $B$ , so gibt es eine komplexe Zahl  $k$ , sodaß  $U(s) = U_1(s) + k$  und  $V(t) = V_1(t) - k$  für alle reellen  $s$  bzw.  $t$ .

$W$  und  $U, V$  bestimmen sich also i.w. eindeutig gegenseitig.

Eine auf  $B$  definierte, endlich komplexwertige und lokal integrierbare Funktion  $W(s,t)$ , für die auch  $a(\frac{s+t}{2})W(s,t)$  lokal integrierbar ist,<sup>69</sup> ist genau dann ein zulässiges  $W$ , wenn, bei beliebig vorgegebenen reellen  $t_1, t_2$ , die Differenz

$$W(s, t_1) - W(s, t_2) = C_{t_1, t_2}$$

unabhängig von  $s$  ist für alle  $s$ , für die  $(s, t_1)$  und  $(s, t_2) \in B$ .

Der Beweis hierzu ist dem von Satz 1.1 ähnlich.

Auf  $B$  zweimal stetig differenzierbare  $W$  sind genau dann zulässig, wenn  $W''_{st} = 0$  auf  $B$ .

5) Existenzsatz: Zu jedem zulässigen  $W(s,t)$  existiert eine verallgemeinerte Lösung von (1) auf ganz  $B$ .<sup>78</sup>

Der Beweis wird mittels Iteration ähnlich wie in § 10 erbracht, wobei man setzt  $G_0 := W$ ,  $G_{m+1} := W + \frac{1}{4} \iint_{B(\gamma, t)} a G_m ds dt$ .

Lokal konvergieren diese  $G_m$  gleichmäßig gegen ein  $G_\infty$ , das auf  $B$  verallgemeinerte Lösung zu dem gegebenen  $W(s,t)$  ist. Ist  $|W(s,t)|$  auf einem Streifen  $I_0 \times R$  beschränkt  $\leq W_0$ , so gilt dort

$$|G_\infty(s,t) - W(s,t)| \leq W_0 \cdot C \cdot [\exp(k \cdot |t+s-2x_0|) - 1]^{70},$$

wo  $C$  und  $k$  nur von  $a(x)$  und  $I_0$  abhängen und  $x_0$  das in (3) verwendete  $x_0$  ist (eine Lösung  $G(s,t)$  bzw.  $F(x,y)$  von (3) bzw.

(1) ist ja durch  $W$  erst dann bestimmt, wenn noch  $x_0$  aus  $I$  gegeben ist; für 5) ist  $x_0$  beliebig aus  $I$  vorgebar).

6) Eindeutigkeitssatz: Zu einem zulässigen  $W(s,t)$  und  $x_0$  aus  $I$  existiert genau eine Lösung von (3), also auch genau eine verallgemeinerte Lösung von (1).

Der Beweis läuft wie üblich mittels iterierter Abschätzung der Differenz zweier Lösungen zu gleichem  $W$  über (3).

Mit Hilfe dieses Eindeutigkeitssatzes erhält man:

Eine verallgemeinerte Lösung von (1) ist durch ihre Werte in einem beliebigen Teilstreifen  $I_0 \times R$  eindeutig auf ganz  $P$  bestimmt, wenn  $I_0$  innere Punkte hat.

Insbesondere verschwindet eine verallgemeinerte Lösung von (1) auf ganz  $P$  identisch, wenn sie in einem solchen Teilstreifen verschwindet.

Dasselbe gilt für zulässige Anfangsbedingungen (denn das sind verallgemeinerte Lösungen von (1) für  $a(x) = 0$  !)

Für fastperiodische  $F(x,y)$  ließe sich dieser Eindeutigkeitssatz auch mit Hilfe der Fourierreihentheorie des § 5 gewinnen, für Linearkombinationen elementarer  $F(x,y)$  folgt er aus Anhang II, 7) .)

Versteht man unter  $W(s,t)$  hier zulässige  $W$ , unter  $G(s,t)$  Lösungen von (3) bzw. verallgemeinerte Lösungen von (1), so gilt:

Die Zuordnung  $W(s,t) \longleftrightarrow G(s,t)$  ist stets definiert, eineindeutig und linear.

$${}_cTW \longleftrightarrow {}_cTG, \quad SW \longleftrightarrow SG;$$

Ist  $W_1 = W_2$  f.ü. auf  $B$ , so gilt dasselbe von den  $G_v$  bzw.  $F_v$  auf  $B$  bzw.  $P$ .

$W, G, F$  sind gleichzeitig lokal beschränkt, stetig oder stetig differenzierbar auf  $B$  bzw.  $P$ ; ist  $a(x)$  stetig, so sind  $W, G, F$  auf  $B$  bzw.  $P$  gleichzeitig zweimal stetig differenzierbar<sup>71</sup>, das zugehörige  $F$  genügt dann (1). Alle diese Eigenschaften gelten dann auch für die zugehörigen  $U(s)$  und  $V(t)$ .

Ist  $I$  beschränkt und  $a(x)$  über  $I$  integrierbar, so sind  $W, G, F$  gleichzeitig auf  $B$  bzw.  $P$  beschränkt<sup>72</sup>.

$W$  und  $G$  sind gleichzeitig periodisch (im Sinne von (36)).

Bei kompaktem  $I$  sind  $W$  und  $G$  gleichzeitig "y-fastperiodisch gleichgradig in  $x$  aus  $I$ " (d.h. f.p. längs der Geraden  $\frac{s+t}{2} = x$ ).

Konvergieren die  $W_v$  wie a), b), c) in 3), so gilt dasselbe von den  $G_v$  bzw.  $F_v$  und umgekehrt;  $W_\infty, G_\infty, F_\infty$  sind dann von der hier betrachteten Art und einander über (3) zugeordnet.

- 8) Eine verallgemeinerte Lösung von (1) ist genau dann gerade, wenn das zugehörige  $W$  symmetrisch ist, d.h. wenn <sup>72\*</sup>

$$U(s) = V(s) \quad \text{für alle } s \text{ aus } R.$$

Beweis: Aus  $F=SF$  oder  $F(x,y) = F(x,-y)$  auf  $P$  folgt wegen  $G(s,t) = F\left(\frac{s+t}{2}, \frac{-s+t}{2}\right)$  für das zugehörige  $G$  Symmetrie:

$$G(s,t) = G(t,s) \quad \text{für alle } (s,t) \in B.$$

In diesem Falle ist, wie man leicht nachrechnet, auch

$H(s,t) = \iint_{b(s,t)} G \, ds \, dt$  symmetrisch, sodaß es also auch  $W(s,t)$  sein muß.

Ist umgekehrt  $W(s,t)$  gerade, so bilde man  $QF = \frac{1}{2}(F+SF)$ ;  $QF$  ist dann gerade. Das zugehörige " $QW$ " hat sich dabei aber nicht geändert, denn " $QG$ " =  $\frac{1}{2}(G(s,t) + G(t,s))$ , also gilt auch " $QW$ " =  $\frac{1}{2}(W(s,t) + W(t,s)) = W(s,t)$ . Da nach 6) ein zulässiges  $W$  die verallgemeinerte Lösung von (1) eindeutig bestimmt, hat man hier  $F = QF$ , d.h.  $F$  ist gerade.

- 9) Auch zu den in der Theorie partieller Differentialgleichungen üblichen Anfangsbedingungen I. und II. Art gibt es verallgemeinerte Lösungen von (1):

Ist  $f(x)$  auf  $I$  definiert, endlich komplexwertig und lokal integrierbar, ist weiter  $a\left(\frac{s+t}{2}\right)f(s)$  auf  $B$  lokal integrierbar<sup>73</sup> (z.B.  $a$  oder  $f$  lokal beschränkt), so gibt es eine verallgemeinerte Lösung  $F_f(x,y)$  von (1), sodaß  $F_f(x,0) = f(x)$  auf  $I$ .

Die Zuordnung  $F \rightarrow QF$  liefert dann ein gerades  $F_f$ , d.h. zu solchen  $f(x)$  gibt es eine verallgemeinerte Lösung von (1),  $F_f$ , für die  $F_f(x,0) = f(x)$  und " $F_f''(x,0) = 0$ " auf  $I$ . (vgl. Satz 2.3)

Ist  $I$  abgeschlossen (beschränkt oder unendlich) und  $f(x)$  auf  $I$  a) stetig, b) einmal stetig differenzierbar, c) zweimal stetig differenzierbar sowie im Fall c)  $a(x)$  auf  $I$  stetig, so existiert ein gerades  $F_f$ , das auf  $P$  a) stetig, b) einmal stetig differenzierbar, c) zweimal stetig differenzierbar ist und im Fall c) der Gleichung (1) genügt, also gewöhnliche Lösung von (1) ist <sup>73</sup>.

Ist  $I$  kompakt, so kann man das  $F_f$  periodisch annehmen, je nach den gemachten Voraussetzungen hat man auch noch die Eigenschaf-

a) bis c) analog dem vorangehenden Satz (vgl. Satz 10.1').  
 Anfangsbedingungen dieser Art existieren also insbesondere  
 zulässige  $W$  mit den entsprechenden Eigenschaften (vgl. 7).  
 kann auch noch zu allgemeineren Anfangsbedingungen I. oder  
 Art zulässige  $W(s,t)$  konstruieren bzw. dafür Existenzsätze  
 aufstellen, doch wollen wir darauf nicht weiter eingehen.  
 der Zusammenhang zwischen zulässigen  $W$  und solchen Anfangs-  
 bedingungen nur indirekt über (3) gegeben ist, kann man sich  
 nicht auf 5) stützen, sondern muß den Beweis neu führen (er  
 verläuft ähnlich wie der von Satz 10.1).

II) Eindeutigkeit bei einer Anfangsbedingung II. Art :

Ist  $a(x)$  auf  $I$  lokal integrabel, so gibt es auf dem klein-  
 sten Quadrat  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , das das Intervall  $I$  der  $x$ -Achse als  
 eine Diagonale enthält, höchstens ein <sup>74</sup>gerades  $F_f$ , das  
 verallgemeinerte Lösung von (1) ist.

Beweis: Auf das zugehörige  $G(s,t)$  umformuliert, lautet die  
 Behauptung: Es gibt in dem kleinsten achsenparallelen Quadrat  
 $Q$ , das die Strecke  $s=t \in I$  als Diagonale enthält, höchstens  
 ein symmetrisches  $G(s,t)$ , das (3) genügt und für das auf  $I$   
 $G(s,s) = f(s)$  ( $f(s)$  vorgegeben); (nach 8) haben wir hier  
 $G(s,s) = V(s)$ .)

Wir betrachten, zunächst bei kompaktem  $I$ , die Differenz zwei-  
 er solcher Lösungen,  $G_0 := G_1 - G_2$ . Für  $G_0$  gilt

$G_0(s,s) = 2U_0(s) + \frac{1}{4} \iint_{b(s,t)} a G_0 ds dt$  für  $s$  aus  $I$ , also ist  
 $0 = U_1 - U_2 = V_1 - V_2 = V_0$  auf  $I$  und damit nach (3)  $G_0$  auf  $\eta = I \times I$   
 stetig. Daher darf man den bei Satz 1.1 bewiesenen Hilfssatz  
 15 anwenden und erhält, daß  $H_0(s,t)$  auf  $\eta$  einmal stetig  
 differenzierbar ist; wegen  $0 = 2U_0(s) + \frac{1}{4} H_0(s,s)$  ist dann  
 auch  $U_0(s)$  auf  $I$  und  $G_0(s,t)$  auf  $\eta$  einmal stetig differenzier-  
 bar. Mit den Formeln (6) und (6') erhält man dabei

$$U'_0(s) = -\frac{1}{8} \left( \int_{2x_0-s}^s a\left(\frac{s'+s}{2}\right) G_0(s',s) ds' + \int_{2x_0-s}^s a\left(\frac{s+t}{2}\right) G_0(s,t') dt \right)$$

oder, unter Ausnutzung der Symmetrie von  $G_0$ ,

$$U_0''(s) = -\frac{1}{4} \int_{2x_0-s}^s a\left(\frac{s'+s}{2}\right) G_0(s', s) ds'.$$

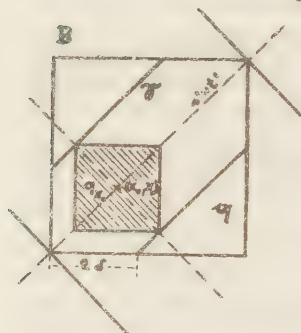


Fig. 15

Sei nun  $\delta_0 := \frac{1}{2\Lambda}$ , wo  $\Lambda := \int_I |a(x)| dx$  ( $< \infty$ , da  $I$  kompakt),

$q_{x_0}$  das größtmögliche Quadrat aus  $\mathcal{Q}$ , das den Punkt  $(s, t) = (x_0, x_0)$  als Mittelpunkt hat, das achsenparallel liegt und dessen Seitenlänge  $2\delta \leq 2\delta_0$  ist <sup>75</sup> (vgl. Fig. 15),

$$q_{x_0} := \begin{cases} |s - x_0| \leq \delta \\ |t - x_0| \leq \delta \end{cases}$$

sowie  $B := \max_{(s,t) \in q_{x_0}} |G_0(s, t)|$ .

Obige Integraldarstellung für  $U_0'$  gibt dann die Abschätzung

$$|U_0''(s)| \leq \frac{1}{4} \cdot B \cdot \Lambda \quad \text{falls } |s - x_0| \leq \delta,$$

also, da  $0 = G_0(x_0, x_0) = 2U_0(x_0)$ , für dasselbe  $s$ -Intervall

$$|U_0(s)| \leq \delta \cdot \frac{B\Lambda}{4} \leq \frac{B}{8}.$$

Damit kann man nun  $G_0(s, t)$  für  $(s, t)$  aus  $q_{x_0}$  abschätzen:

$$|G_0(s, t)| \leq |U_0(s)| + |U_0(t)| + \frac{1}{4} B \iint_{q_{x_0}} |a| ds dt \leq \frac{B}{8} + \frac{B}{8} + \frac{B}{4} \cdot 2\delta \Lambda \leq \frac{B}{2};$$

dies ist, wenn man die Definition von  $B$  beachtet, nur möglich für  $B = 0$ , sodaß auf  $q_{x_0}$  bzw.  $|s - x_0| \leq \delta$  die Funktionen  $G_0$  und  $U_0$  identisch verschwinden.

Da man nach Satz 1.1  $x_0$  beliebig wählen kann, und da obige Überlegung unabhängig von  $x_0$  aus  $I$  gilt <sup>75</sup>, ist  $G_0(s, t)$  in dem von allen diesen Quadraten  $q_{x_0}$  überstrichenen Sechseck  $\mathcal{T}$  (vgl. Fig. 15) identisch Null.

artet  $\mathcal{T}$  nicht zu dem Quadrat  $\mathcal{Q}$  selbst aus, sondern ist  $\mathcal{T}$  echte Teilmenge von  $\mathcal{Q}$ , so betrachten wir jetzt ein achsenparalleles Quadrat  $q'_{x_0}$ , das ganz in  $\mathcal{Q}$  liegt, eine Kantenlänge  $2\delta' \leq 2\delta_0$  aufweist und dessen eine Diagonale auf dem Rand von  $\mathcal{T}$  liegt;  $x_0$  ist dabei so bestimmt, daß die Gerade  $s+t=2x_0$  die andere Diagonale von  $q'_{x_0}$  enthält (vgl. Fig. 16).

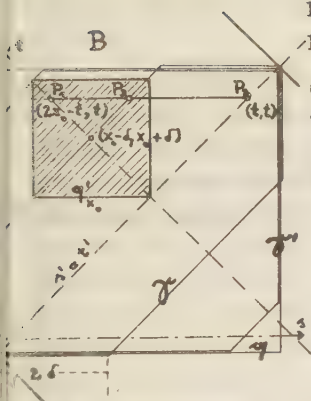


Fig. 16

Bezeichnet man mit  $B'$  das Maximum des Betrages  $|G_0(s, t)|$  auf  $q'_{x_0}$ , so ergibt eine analoge Abschätzung wie oben für  $t$  aus  $q'_{x_0}$ , d.h. für  $|t - (x_0 + \delta)| \leq \delta'$

$$\begin{aligned} |U_0(t)| &= \frac{1}{4} \left| \int_{2x_0 - t}^{\frac{s' + t}{2}} G(s', t) ds' \right| = \\ &= \left| \frac{1}{4} \int_{P_1}^{P_2} aG \, ds' \right| = \left| \frac{1}{4} \int_{P_1}^{P_3} aG \, ds' \right| \\ &\leq \frac{1}{4} B' A, \end{aligned}$$

denn auf der Teilstrecke  $P_2 P_3$  (integriert wird über die Strecke  $P_1 P_2$ )

verschwindet nach dem Vorangegangenen ja  $G_0(s, t)$ . Da außerdem früher schon  $U_0(x_0 + \delta) = 0$  gezeigt wurde, kann man auch  $U_0$  abschätzen

$$|U_0(t)| \leq \delta' \frac{AB'}{4} \leq \frac{B'}{8},$$

und zwar gilt dies für  $|t - (x_0 + \delta)| \leq \delta'$ .

Durch eine ganz analoge Abschätzung erhält man, unter Ausnutzung der Symmetrie von  $G_0$ , für  $s$  aus  $q'_{x_0}$ , d.h. für

$$|s - (x_0 - \delta)| \leq \delta' \quad |U_0(s)| \leq \frac{B'}{8},$$

so daß also für  $(s, t)$  aus  $q'_{x_0}$

$$|G_0(s, t)| \leq |U_0(s)| + |U_0(t)| + \frac{1}{4} B' \iint_{q'_{x_0}} |a| ds dt' \leq \frac{B'}{8} + \frac{B'}{8} + \frac{B'}{4} \cdot 2\delta' A \leq \frac{B'}{2},$$

daraus wieder  $B' = 0$  folgt.

Läßt man nun  $q'_{x_0}$  wieder  $\eta$  durchlaufen, so findet man, daß  $G_0(s, t)$  in einem  $q'_{x_0}$  neuen Sechseck  $\gamma'$ , das, wenn es nicht zu dem Quadrat  $\eta$  selbst entartet, mindestens die Breite  $4\sqrt{2} \cdot \delta_0$  hat, identisch verschwindet.

Nach endlich vielen Schritten (höchstens  $\lceil \frac{||I||}{\delta_0} \rceil + 1$ ) hat man so  $\eta$  ausgeschöpft,  $G_0(s, t)$  verschwindet in ganz  $\eta$ .

Ist  $I$  nicht kompakt, so approximiere man einfach  $I$  durch kompakte  $I_0$ , auch in diesem Falle verschwindet  $G_0$  auf  $I \times I$ .

Damit ist dann dort auch  $G_1(s,t) = G_2(s,t)$ , wie es in 10) behauptet wurde.

Ist speziell  $I = (-\infty, +\infty)$ , so gilt die Eindeutigkeitsaussage von 10) in der ganzen Ebene  $\mathbb{R}^2$ , in diesem speziellen Fall gibt es zu vorgegebenem  $f(x)$  höchstens ein gerades  $F_f(x,y)$ , das in der ganzen  $xy$ -Ebene verallgemeinerte Lösung von (1) ist. (Nach 9) gibt es dort mindestens eine Lösung, wenn neben  $f(x)$  auch  $a(\frac{x+y}{2})f(x)$  lokal integrierbar ist.)

### Anmerkungen

Statt der Differentialgleichung (1) kann man eine beliebige Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung für  $F(x) = F(x_1, \dots, x_m)$  betrachten, die linear und homogen ist (damit die Lösungsmannigfaltigkeit einen linearen Raum bildet), und die invariant gegenüber einer Gruppe  $\mathcal{G}$  von Transformationen  $T$  des  $x_1, \dots, x_m$ -Raumes ist, d.h. mit  $F$  ist auch  $TF(x) = F(Tx)$  Lösung dieser Differentialgleichung. Kann man die Lösungsmannigfaltigkeit durch Verwendung einer passenden Topologie abschließen (entweder indem man die Differentialgleichung in eine Integralgleichung umwandelt wie hier, oder unter Verwendung der Distributionstheorie; ein anderer Weg, der stets möglich ist, ist in <sup>5</sup> angedeutet), so ist der allgemeine Approximationssatz aus Maak (10) anwendbar; falls man die elementaren Funktionen ausrechnen kann (bei einer eingliedrigen Gruppe genügen sie i.a. einer Differentialgleichung von  $k$ -ter Ordnung, mit  $k-1$  unabhängigen Variablen), hat man so einen Approximationssatz für bezüglich  $\mathcal{G}$  fastperiodische Lösungen der gegebenen Differentialgleichung erhalten.

<sup>1</sup> Beschränkt man sich auf hyperbolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variablen, so muß diese Differentialgleichung zunächst nach oben homogen und linear sein; verwendet man die Gruppe der Translationen  $T_c$ ,  $y \rightarrow y+c$ , so folgt aus der Invarianzbedingung, daß die Koeffizienten dieser Differentialgleichung nur von  $x$  abhängen dürfen, d.h. die Differentialgleichung hat notwendig die Form

$$F''_{xx} - A(x)F''_{yy} + B(x)F'_x + C(x)F'_y + D(x)F = 0 \quad (A(x) > 0);$$

solche Differentialgleichungen kann man durch passende Transformationen, die nur die Veränderliche  $x$  betreffen und daher die zu untersuchende Fastperiodizität nicht wesentlich stören, stets auf die Form  $A \equiv 1$ ,  $B \equiv 0$  bringen.

Das Glied mit  $C(x)$  kann man zwar nicht wegschaffen, doch liefert eine Behandlung dieses allgemeineren Falles, die großenteils ganz ähnlich wie hier verläuft, keine wesentlich anderen Ergebnisse; z.B. kann man auch für diese allgemeinere partielle Differentialgleichung, wenn man sie schon auf die Form  $A \equiv 1$ ,  $B \equiv 0$  transformiert hat, ganz analog wie in § 1 "verallgemeinerte Lösungen" mittels einer Integralgleichung definieren (der noch zusätzlich auftretende Koeffizient  $C(x)$  muß dabei lokal totalstetig sein, vgl. Anhang I, 3)), die (b) entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung, der die x-Anteile der elementaren Funktionen genügen, hat dann das Aussehen

$$(\omega \text{ reell}) \quad h''(x) - (D(x) + i\omega C(x) - \omega^2) \cdot h(x) = 0.$$

(Wegen der für  $B \equiv 0$  notwendigen x-Transformation vgl. z.B. § 6, Beispiel 4, wo die Differentialgleichung von Delsartre auf unseren Fall zurückgeführt wird.)

Bei Differentialgleichungen erster Ordnung, die man an sich (bis auf den § 1 entsprechenden Teil) ähnlich behandeln könnte, läßt sich die Lösungsmannigfaltigkeit nicht so leicht abschließen, auch sind die resultierenden Approximationssätze i.a. nicht sehr interessant, aus dem ersteren Grund scheiden auch parabolische Differentialgleichungen aus.

2 Wegen der Definition von "lokal integrierbar" vgl. § 1.

3 Z.B. bei der Untersuchung Stepanoff-fastperiodischer Funktionen auf beliebigen lokal-kompakten Gruppen, oder bei einer Charakterisierung harmonischer Funktionen durch die Fastperiodizität (in  $r$ ) von 
$$\int_0^1 f(z + e^{2\pi i r \tau}) d\tau.$$

4 Es gibt dann stets auch fastperiodische  $F_f$ , für die noch " $F_y'(x, 0) = 0$ " wird (vgl. § 2, Schluß).

5 Mit 
$$\|F\| := \sup|F| + \sup|F'_x| + \sup|F'_y| + \sup|F''_{xx}| + \sup|F''_{xy}| + \sup|F''_{yy}|,$$

wo die Supremum-Bildung über den Grundstreifen  $P$  (s. später) zu erstrecken ist, erhält man eine Norm (!), die aus der Lösungsmannigfaltigkeit von (1) einen Banach-Raum aussondert, der ein Teilraum des hier betrachteten Raumes  $\mathcal{E}$  ist (Def. 2), und dessen fastperiodische Elemente aus  $\mathcal{f}$  (§ 2) sind, sodaß dafür auch alle hier abgeleiteten Sätze gelten, doch ist die Lösungsmannigfaltigkeit zu eng (es kommen nur zweimal stetig differenzierbare  $F(x,y)$  bzw.  $f(x)$  für den II. Teil vor), andererseits erhält man dafür auch etwas mehr, es werden nämlich gleichzeitig mit  $F$  bzw.  $f$  auch die ersten und zweiten Ableitungen davon durch die Näherungspolynome und deren Ableitungen gleichmäßig approximiert.

Man könnte, um Vollständigkeit zu erzielen, auch daran denken, zu Distributionen überzugehen: Da hier jedoch speziell eigentliche Funktionen  $F(x,y)$  bzw.  $f(x)$  interessieren, und der Übergang zu Distributionen sowie die Rückübertragung doch etwas mühsam ist, bleibt man besser bei Funktionen im üblichen Sinne, der dadurch bedingte Aufwand ist sicher nicht größer als bei Verwendung der Distributionstheorie, außerdem erhält man so doch oft genauere und konkretere Aussagen.

Weitere Gründe, die gegen eine Verwendung der Distributionstheorie sprechen, sind die folgenden:

Einmal bereitet die Multiplikation von Distributionen Schwierigkeiten, sodaß man Einschränkungen über den Koeffizienten  $a(x)$  machen müßte (z.B. unendlich oft differenzierbar), zum anderen enthält die Lösungsmannigfaltigkeit einer hyperbolischen Differentialgleichung im Distributionssinne (im Gegensatz zum elliptischen Fall), auch Distributionen, die nicht Funktionen entsprechen.

<sup>6</sup> Die Bedingung " $a(x)F(x,y)$  lokal integrierbar" folgt als notwendige sofort aus (3), denn  $a(\frac{s+t}{2})G(s,t)$  muß, damit (3) überhaupt definiert ist, lokal integrierbar sein. Prinzipiell könnte man (3) auch in eine Integralgleichung für  $F(x,y)$  umtransformieren, doch rechnet es sich mit (3) bequemer.

Im übrigen vergleiche man hierzu mit Anhang III

6<sup>e</sup>  $b(s,t)$  ist stets als abgeschlossenes Dreieck zu denken.

Bei seinem Existenzbeweis in (5), S. 406... , verwandelt Kamke die Differentialgleichung  $z''_{xy} = f(x,y,p,q,z)$  ebenfalls in eine Integralgleichung der Form (3), es kommt bei ihm aber vor dem Doppelintegral ein  $\pm$  Zeichen vor, je nachdem der Punkt  $(s,t)$  oberhalb oder unterhalb der Ausgangskurve liegt (vgl. S 406, Gl. (20)); das  $-$  Zeichen ist bei Kamke nicht richtig; wenn man durch diese Gleichung eine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung erhalten will, muß man in beiden Bereichen, so wie es hier geschieht, das  $+$  Zeichen nehmen. (Die Richtigkeit des Existenzsatzes 2, S. 406 bei Kamke wird durch diese Bemerkung natürlich nicht berührt.)

7 Dies folgt aus der (zweidimensionalen) Totalstetigkeit von  $\varphi(K) := \iint_K a\left(\frac{s+t}{2}\right) G(s',t') ds' dt'$  ( $K$  meßbare Menge  $\subset B$ ).

8 Bei dem hier gegebenen Beweis benötigt man auch die Existenz und Stetigkeit von  $F''_{xy}$ , damit man  $G''_{st}$  berechnen kann, jedoch lassen sich die in Satz 1.2 gemachten Voraussetzungen, jedenfalls was den ersten Teil betrifft, sicher abschwächen.

9 Ist  $(x_1, y_1)$  Randpunkt von  $B$ , so sind nur Halbkreisumgebungen gemeint; auch dafür bleiben Satz und Beweis mit entsprechenden Modifikationen richtig (vgl. 13).

10 Nach (1) ist dies für  $F(x_1, y_1) \neq 0$  notwendig, wenn  $F$  in einer Umgebung von  $(x_1, y_1)$  der Gleichung (1) genügt.

11 Diese Formeln gelten auch dann, wenn  $(s,t)$  links unter der Geraden  $s' + t' = 2x_0$  liegt.

12 Die Gleichung (3) zeigt, daß  $s$ -Stetigkeit für  $s=s_1$  ( $t$  fest  $=t_1$ ) sowie  $t$ -Stetigkeit für  $t=t_1$  ( $s$  fest  $=s_1$ ) genügen;

Nach (3) ist dann wegen der Stetigkeit von  $H(s,t)$  auch  $U(s)$  in  $s_1$  stetig, ebenso  $V(t)$  in  $t_1$ , sodaß dann automatisch  $G(s,t)$  st-stetig in  $(s_1, t_1)$  ist.

3 Sollte  $(s_1, t_1)$  Randpunkt von  $B$  sein, so genügt es, wenn  $G(s,t)$  auf  $b(s_1, t_1)$  beschränkt ist,  $H(s,t)$  ist dann nur einseitig nach  $s$  und  $t$  differenzierbar.

4 (6) und (6') gelten auch für solche  $(s_1, t_1)$ , die unterhalb der Geraden  $s' + t' = 2x_0$  liegen; gehört der Rand von  $B$  zu  $B$  (d.h. ist  $I$  (teilweise) abgeschlossen), so gelten diese Gleichungen auch dort für die einseitigen Ableitungen von  $H$ .

5 Zunächst ist man geneigt, sich auf  $\varphi(x) \equiv 1$  zu beschränken, da man annehmen könnte, daß fastperiodische  $F(x,y)$  (nur solche interessieren hier) stets beschränkt sind. Dem ist aber nicht so, es gibt auch nicht-beschränkte f.p.  $F(x,y)$ , die verallgemeinerte Lösungen von (1) sind (sogar "elementare", vgl. § 6, 4) oder 5). Daher wird man nun als Normfunktionen beliebige  $\varphi(x,y) > 0$  zulassen; da aber die betrachteten  $F(x,y)$  bei festem  $x$  in  $y$  als fastperiodische Funktionen beschränkt sind, genügt es, wenn man nur Normfunktionen der Form  $\varphi(x)$  ins Auge faßt.

In den Sonderfällen, in denen eine Meßbarkeit von  $\varphi(x)$  erforderlich ist (z.B. in § 5), kann man für die Beweise stets das gegebene  $\varphi(x)$  so abändern, daß es integrierbar wird, die Sätze selbst gelten auch dann für das ursprünglich gegebene  $\varphi(x)$  (vgl. <sup>37</sup>).

16 Eine Verwechslung mit den in  $I = \{c,d\}$  vorkommenden  $c$  dürfte wohl ausgeschlossen sein.

17 Zugrunde liegt hier der folgende allgemeine Satz:  
Sei  $M$  eine beliebige Menge (mit Elementen  $z$ ),  $\varphi(z)$  eine auf  $M$  definierte Funktion mit positiv-reellen Werten; sei  $f_v(z)$  eine Folge von Funktionen, die auf  $M$  definiert sind und die ihre Werte in einem normierten Raum  $E$  haben;

bilden dann die  $f_v(z)$  im Sinne der Norm  $\|f\| := \sup_{z \in M} \rho(z) \|f(z)\|$  eine Fundamentalfolge, und konvergieren die  $f_v(z)$  punktweise in  $M$  gegen  $f(z)$ , so gilt auch  $\|f - f_v\| \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$ .

Kurz: Eine gleichmäßig konzentrierte Funktionenfolge, die punktweise gegen eine Funktion konvergiert, konvergiert auch gleichmäßig gegen diese Funktion.

(Dieser Satz gilt auch noch für uniforme Räume).

18 Anders als Seite 19/20 kann man auch so schließen: Jedenfalls genügt  $G_\infty$  einer Gleichung der Form

$$G_\infty = W_\infty + \frac{1}{4} \iint_{b(s,t)} a \cdot G_\infty ds dt' ;$$

da die  $H_m$  und damit auch die  $W_m$  lokal gleichmäßig konvergieren; es ist nur noch zu zeigen, daß  $W_\infty$  die Gestalt  $U(s) + V(t)$  hat. Dies folgt aber sofort mit dem Kriterium in Anhang III, 4) (Schluß), denn die  $W_m$  erfüllen die dortige Bedingung.

19 Die Konvergenz von  $\iint_{b(s,t)} a \cdot G_m ds dt'$  folgt z.B. daraus, daß  $\iint_{b(s,t)} |a(\frac{s+t'}{2})| ds dt' < \infty$  (Beweis mittels (5)); lokal ist diese  $b(s,t)$  Konvergenz gleichmäßig, da  $\iint_{b(s,t)} |a| ds dt'$  stetig ist, also lokal auf  $B$  beschränkt bleibt.

20 Der Beweis zeigt, daß die Behauptung des Hilfssatzes auch dann noch richtig ist, wenn  $f(u,v)$  in  $v$  nur  $\varepsilon_0$ -f.p. für ein einziges festes  $\varepsilon_0$  ist (dies natürlich wieder gleichgradig in  $u$ ).

21 Man muß über (3) schließen, denn aus der lokalen Integrierbarkeit von  $F(x,y)$  folgt die  $y$ -Meßbarkeit nur für fast alle  $x$ .

22 Aus diesem Grunde können wir hier nicht so wie Delsartre, Levitan oder Marčenko vorgehen, die i.w. nur  $\mathcal{F}_0$  betrachtet haben.

23 Im Falle eines beidseitig unendlichen Intervalles  $I=(-\infty, \infty)$  gilt davon auch die Umkehrung: Existiert für alle  $x$   $F'_y(x, 0)$  und ist  $= 0$ , so ist  $F(x, y)$  gerade.

(Man kann nämlich zeigen, daß dann für die zugehörigen  $U, V$  eine Gleichung  $U'(s) = V'(s)$  besteht; bei passender Abänderung der  $U, V$  gilt also  $U = V$ , sodaß mit Satz 2.4 die Behauptung folgt.)

24 Hat man allgemein eine Gruppe  $G$ , einen Normalteiler  $N$  davon mit endlichem Index  $j$ , und eine Funktion  $f(x)$  auf  $G$  mit Werten in einem normierten Raum  $E$ , die auf  $N$  fastperiodisch ist, und gilt für alle  $g$  aus  $G$ ,  $n', n''$  aus  $N$

$$\|f(gn') - f(gn'')\| \leq K \cdot \|f(n') - f(n'')\|$$

mit von  $g, n', n''$  unabhängigem  $K$ , so ist  $f$  auch auf  $G$  selbst fastperiodisch (es genügt dabei, wenn obige Ungleichung nur für die  $j$  Repräsentanten  $g_1, \dots, g_j$  der Nebenklassen mod  $N$  erfüllt ist).

25 Mehr kann man über  $h_1(x)$  i.a. nicht aussagen; jedoch folgt aus 11 (vgl. Anhang II, 1), daß bei stetigem  $a(x)$  auch  $h(x)$  zweimal stetig differenzierbar ist; ist  $a(x)$   $k$ -mal stetig differenzierbar, so ist  $h(x)$   $(k+2)$ -mal stetig differenzierbar.

26 Um dies zu erkennen, führe man in dem dortigen Integral  $\frac{s+t}{2} =: \frac{r}{2}$  mit  $r$  als neuer Integrationsveränderlicher ein, wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $G$  kann man dann leicht die st-Stetigkeit von  $H'_s$  erkennen.

27 Die Funktionen  $G(s_0, t)$  und  $\exp(1 \cdot \frac{s_0 - t}{2})$  sind trivialerweise in  $t$  totalstetig, außerdem ist die Summe und das Produkt totalstetiger Funktionen wieder totalstetig.

28 Die Stellen, an denen  $e^{1t/2} = 0$ , sind abzählbar.

29 Ein größtes  $\varphi_1(x)$ , d.h. ein  $\varphi(x)$ , das Satz 3.4 genügt und für das die Konvergenz in  $\mathcal{F}$  am besten wird, das also überall möglichst groß wird, gibt es nicht, es ist

$$\varphi(x) := \sup (\varphi_1(x) : \varphi_1 \text{ genügt Satz 3.4} ) \equiv 1 \quad \text{auf } I.$$

30 Ist die  $v$ -Indexmenge endlich, so gibt es (bei richtiger Wahl der Ordnung der Nullstellen) stets solche f.p.  $F$ : Es gibt nämlich nach Anhang II, 6) sogar endliche Linearkombinationen elementarer f.p. Funktionen aus  $\mathcal{F}$ , die auf den Geraden  $x=x_v$  identisch verschwinden, aber nicht in  $P$  identisch 0 sind.

31 Nach Anhang III, 5) gibt es zu jedem vorgegebenen  $U(s) + V(t)$ , das gewisse Meßbarkeitseigenschaften aufweist, eine verallgemeinerte Lösung von (1) auf ganz  $B$ ; da man dabei  $U$  und  $V$  auch unstetig wählen kann, sind in diesem Fall die zugehörigen  $G$  und  $F$  sicher nicht überall stetig,

32 Lediglich die  $x$ -gleichgradige gleichmäßige  $y$ -Stetigkeit ist (bei kompaktem  $I$ ) auch direkt aus der Definition 3 ohne größere Schwierigkeiten ableitbar, die anderen Aussagen werden erst mit Hilfe des Approximationssatzes einfach beweisbar.

33 Statt " $F$  aus  $\mathcal{F}$ " genügt es wie in Satz 2.1 zu fordern, daß ein reelles  $y_0$  existiert, für das

$$\sup_{x \in I} |\varphi(x) \cdot F(x, y_0)| < \infty.$$

Mit einem dem Hilfssatz bei Satz 2.1 entsprechenden Satz kann man dann unter Verwendung von a) und b) auch  $\|F\|_{\mathcal{F}} < \infty$  zeigen.

34 Ein analoger Satz gilt auch für nicht-abelsche Gruppen, wenn man "relativ dicht" und "Translationszahl" passend formuliert.

5 Die üblichen Sätze (z.B. Bourbaki) besagen in diesem Fall nur, daß  $f$  auf  $-L$  in der induzierten Topologie gleichmäßig stetig ist, d.h. es sind nur die  $v$  aus  $V$  zugelassen, für die  $+v$  aus  $-L$ ; man kann sich jedoch überlegen, daß die hier benutzte Art der gleichmäßigen Stetigkeit auch noch richtig ist (ohne daß  $G$  lokalkompakt zu sein braucht).

Aus  $\int_{I_1} |h_\omega|^2 dx = 0$  folgt  $h_\omega(x) = 0$  f.ü. auf  $I_1$ ; wegen der Stetigkeit der  $h_\omega$  ist dann  $h_\omega(x) = 0$  auf ganz  $I_1$ ; da  $h_\omega$  Lösung einer Differentialgleichung (17) ist, folgt mit Anhang II, 2), daß auch auf  $I$   $h_\omega(x) = 0$ .

7 Sollte  $\varphi(x)$  nicht meßbar sein, so setze man für  $x$  aus  $I_v$   $\tilde{\varphi}(x) := \inf (\varphi(x') : x' \text{ aus } I_v)$ , so die  $I_v$  eine abzählbare Folge "fremder kompakter" Intervalle aus  $I$  durchlaufen, die  $I$  ausschöpfen;  $\tilde{\varphi}(x)$  ist dann eine Stufenfunktion, also meßbar, und es gilt  $0 < \tilde{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$  auf  $I$ , außerdem hat  $\tilde{\varphi}(x)$  auf kompakten  $I_1$  aus  $I$  von 0 positiven Abstand. Man ersetze dann in den Beweisen für die Sätze 5.5 und 5.6 überall, wo  $\varphi(x)$  unter einem Integral vorkommt, dieses durch  $\tilde{\varphi}^*$ , die dortigen Abschätzungen und damit auch die zu beweisenden Sätze bleiben dabei richtig, letztere für das ursprünglich gegebene  $\varphi(x)$ .

8 Der Beweis dieser Behauptung folgt z.B. aus dem Fatouschen Lemma.

8\* Beweis z.B. mittels des Approximationssatzes.

9 Das linke Integral in II existiert nach Lebesgue, da der Integrand durch eine integrable Funktion majorisiert wird.

10 Hier gilt eine analoge Bemerkung wie 39.

41 Die Unabhängigkeit der in Maak (10), §3 eingeführten Fourierreihe von dem speziell verwandten inneren Produkt gilt auch noch für allgemeinere Gruppen  $G$  und Räume  $\mathcal{L}$  !

42 Diese Ergebnisse bleiben für beschränkte Intervalle  $I$  nicht richtig, z.B. ist  $F(x,y) := \sqrt{|x-y|} - \sqrt{|x+y|}$  verallgemeinerte Lösung von (1), die auf jedem beschränkten Intervall der  $x$ -Geraden gleichmäßig in  $y$  beschränkt ist, ohne daß die zugehörigen  $U(s)$  und  $V(t)$  beschränkt wären.

43 Der zunächst willkürlich erscheinende Faktor  $\sqrt{x}$  ist hier durchaus sinnvoll: Die Zylinderfunktionen verschwinden nämlich alle im Unendlichen wie  $1/\sqrt{x}$ .

Weiter ist die Beschränkung auf  $\operatorname{Re} \sqrt{k+1/4} \geq 0$  deshalb möglich, weil ein  $h_{-\omega}(x)$  stets auch ein  $h_{\omega}(x)$  ist.

44 Für die Ergebnisse von Delsartre folgt dies aus § 6 und § 11, Beispiel 4.

Auch die von Levitan behandelten Fälle sind wegen der Seite 51 gemachten Bemerkungen und wegen Satz 8.1' in unseren Ergebnissen enthalten (die von Levitan verwendete Definition von f.p. findet sich in unserer Einleitung, S. 4; sein Approximationssatz lautet in unserer Terminologie folgendermaßen: Ein  $f(x)$ , das auf der ganzen reellen Zahlengeraden definiert, stetig und gerade ist, ist genau dann "f.p.", wenn es zu jedem positiven  $\varepsilon$  eine verallgemeinerte Lösung  $F_{f,\varepsilon}$  von (1) zu den Anfangsbedingungen  $F(x,0) = f(x)$  und  $F_y'(x,0) = 0$  gibt sowie eine Linearkombination von endlich vielen elementaren f.p. Funktionen,  $F_{\varepsilon}(x,y) = \sum_{\omega} h_{\omega}(x) \cdot \cos \omega y$ , sodaß

$$\|F_{f,\varepsilon} - F_{\varepsilon}\|_1 < \varepsilon ;$$

aus Satz 8.1' kann man dies aber analog wie (19') sofort herleiten).

Bezüglich der Arbeit (13) von Marčenko ist folgendes zu bemerken:

M. betrachtet zwei Differentialoperatoren  $L_{\nu}(u) := u'' - q_{\nu}(x)u$ , wo die  $q_{\nu}(x)$  ( $\nu=1,2$ ) stetige, reellwertige gerade Funktionen

und, die auf der ganzen Zahlengeraden definiert sind, und für  

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) |q_v(x)| dx < \infty$$
, sowie die partielle Differential-  
 Gleichung 
$$F''_{xx} - q_1(x)F = F''_{yy} - q_2(y)F \quad (M) .$$

ist  $f(x)$ , das für alle reellen  $x$  definiert und lokal integrierbar ist, heißt dann "( $L_1, L_2$ )-f.p.", wenn es eine verallgemeinerte Lösung  $F(x,y)$  von (M) gibt, die dieselben Anfangsbedingungen wie oben erfüllt und die, gleichgradig in  $x$ , in  $y$  f.p. ist. Der von M. bewiesene Approximationssatz sieht dann ganz analog wie der von Levitan aus, lediglich an Stelle der  $\cos y$  treten jetzt Lösungen von  $k''(y) = (q_2(y) + \lambda)k(y)$  (über  $\lambda$  werden keine Einschränkungen gemacht!).

In der Arbeit (13) - sie ist in russisch - keine Beweise angegeben werden, läßt sich nicht beurteilen, inwieweit dies alles richtig ist, zum mindesten müssen aber noch Einschränkungen über  $\lambda$  hinzukommen, wie man aus der Betrachtung des Spezialfalles  $q_1 \equiv q_2 \equiv 0$  erkennt.

Für den allgemeinen von M. betrachteten Fall will mir scheinen, daß es nicht identisch verschwindende ( $L_1, L_2$ )-f.p. Funktionen nur für den (bei uns behandelten) Fall  $q_2(y) \equiv \text{const.}$  gibt.

Es ist dann nämlich ein  $F_f - \sum_{v=1}^m h_{\omega_v} =: F_1 \in f$ ; setzt man 
$$f := \sum_{v=1}^m h_{\omega_v}(x) e^{i\omega_v y} = F \sum_{v=1}^m h_{\omega_v}$$
, so ist  $F_1 + F_2$  ebenfalls aus  $f$  und ein  $F_f$ , d.h.  $f(x)$  muß a-f.p. sein.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $\sum_{v=1}^m h_{k, \omega_{v,k}}(x)$  (für  $k \rightarrow \infty$ ) folgt i.a. nicht die Konvergenz der zugehörigen Ausdrücke

$$\sum_{v=1}^{m_k} F_{\omega_{v,k}} = \sum_{v=1}^{m_k} h_{k, \omega_{v,k}}(x) \cdot e^{i\omega_{v,k} y} \quad !$$

Ein Sonderfall, in dem dies doch gilt, ist z.B. der, daß 
$$\sum_{v=1}^{m_k} h_{k, \omega_{v,k}}(x) = \sum_{v=1}^{m_k} h_{\omega_v}(x) \quad \text{und} \quad \varphi(x) \cdot \sum_{v=1}^{\infty} |h_{\omega_v}(x)| \leq K < \infty \quad \text{auf } I).$$

Im Falle eines beidseitig unendlichen Intervalles nimmt die Form an 
$$\|f\|_0^2 = \sum_{v=1,2}^{\infty} |a_{\omega_v}|^2 \quad . \quad (\|f\|_0^2 := (F_f^*, F_f^*)_0 \text{ eind. l})$$

- 48 Für  $\varphi(x)$  läuft diese Bedingung i.w. auf  $\varphi(x) \equiv 1$  hinaus. Da auf einem endlichen  $I$ , über das  $a(x)$  integrierbar ist, alle möglichen  $h_\omega(x)$  beschränkt sind (vgl. Anhang II, 2)), werden durch solche  $\varphi(x)$  schon alle elementaren f.p.  $f(x)$  erfaßt, so daß man sich in gewissem Sinne auf derartige  $\varphi$  beschränken kann (für den Fall, daß  $\varphi(x)$  an gewissen Stellen von  $I$  nicht beschränkt bleibt, kann Satz 10.1 offensichtlich nicht gelten).
- 49  $I$  kann offen, halboffen oder abgeschlossen sein.
- 49\* Schärfere Abschätzungen, die noch möglich wären, sind umständlicher zu beweisen, für unsere Zwecke genügen (39) und (40).
- 50 Da  $l(s,t)$  auf  $b(s,t)$  stets beschränkt bleibt, existieren diese Integrale stets (vgl. 19).
- 51 Die Konvergenz der  $H_m(s,s)$  gegen  $H(s,s)$  folgt genauso wie in 19. Sie ist lokal gleichmäßig.
- 52 Daher gibt es hier verschiedene f.p.  $F_f$ , sodaß es in diesem Falle (vgl. § 9) wirklich mehrere Fourierreihen zu  $f(x)$  gibt.
- 53 Die obige, für  $\varphi(x) \equiv 1$  durchgeführte Ableitung bleibt natürlich auch dann richtig, wenn  $\varphi$  nur den Voraussetzungen von Satz 10.1 genügt.
- 54 Daraus folgt nicht, daß die einer Fundamentalfolge in  $\mathcal{L}_I^\infty$   $\{\Sigma h_\omega(x)\}$  zugeordneten elementaren Ausdrücke  $\{\Sigma F_\omega\}$  (vgl. 46) in  $\mathcal{F}$  eine Fundamentalfolge bilden!
- 55 Man kann auch Intervalle  $I$  betrachten, die sich über 0 hinaus ins Negative erstrecken, wenn man eine entsprechende

Verschiebung längs der x-Achse vornimmt.

56  $k=0$  gibt wieder den Fall 1), der hier mit enthalten ist:

$$J_{1/2}(x) = C \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad N_{1/2}(x) = -C \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

(vgl. Magnus-Oberhettinger (12), S. 18).

57 Die Funktionen sind wahrscheinlich komplexwertig gemeint, in (3) wird darüber nichts gesagt.

58 Diese Lösungsdarstellungen durch uneigentliche Integrale gelten nur für die von Delsartre betrachtete Differentialgleichung; für allgemeinere Differentialgleichungen ist eine derartige Integraldarstellung, mit deren Hilfe man dann eine Theorie f.p. Funktionen nach dem Muster von Delsartre ziemlich einfach aufbauen könnte, nicht bekannt.

59 Genauer: Die den J-f.p.  $g(r)$  gemäß § 6 zugeordneten  $f(x)$ ,  $f(x) = x^{(2p+1)/2} \cdot g(x)$ , sind in diesem Sinne a-f.p. .

59\* Man braucht ja z.B. nur eine J-f.p. Funktion erster und zweiter Art zu addieren, aus  $f$  kommt man dabei nicht hinaus (vgl. auch 60).

60 Im Falle  $p \leq 0$  kommen bei uns noch die Funktionen  $\frac{1}{r^p} \cdot N_p(\omega r)$  hinzu; daß diese Funktionen bei Delsartre keine Rolle spielen, hat seine Ursache wahrscheinlich in dem von D. verwendeten speziellen Lösungsbegriff, der Lösungen mit gewissen Wachstumseigenschaften von vornherein ausschließt (vgl. (3), S. 293).

61 Da sich die Potenzen  $z^m$  ( $m=0,1,2,\dots$ ) durch unendliche Summen  $\sum_{v=0}^{\infty} C_{m,v} J_v(z)$  ausdrücken lassen (vgl. Magnus-Oberhettinger, (12), S. 19), und da die Konvergenz dieser Reihen auf kompakten  $I$  gleichmäßig ist, folgt ein ähnlicher Satz (statt rein imaginärer Indices haben die vorkommenden Zyl.-Funktionen

jetzt nicht-negative ganze Zahlen als Index) in diesem speziellen Falle auch aus dem Weierstraßschen Approximationssatz.

62 Die Menge, für die (A) gilt, kann dabei eine echte Teilmenge des Existenzbereiches von  $h''(x)$  sein.

63 Natürlich kommen nur solche Systeme  $a_1, \dots, a_m$  aus  $K$  in Betracht, für die nicht alle  $a_v$  verschwinden.

64 Es würde schon punktweise Approximation genügen.

65 Da jedes  $h_{\omega}$  ein  $h_{-\omega}$  ist, kann diese Voraussetzung nicht weggelassen werden.

66 Ein  $h_{\omega}(x)$ , das nicht identisch verschwindet, verschwindet auch auf keinem Teilintervall von  $I$  identisch (Eindeutigkeitssatz in 2)!)

67 Für diese letzte Aussage sind keine Voraussetzungen über die  $\omega_v$  erforderlich, der Beweis folgt aus dem Darüberstehenden.

Da die Summen  $\sum_1^m a_v h_{\omega_v}(x)$  keiner Differentialgleichung der Form (A) genügen, sind die Behauptungen in 7) nicht ganz selbstverständlich.

68 Und zwar gilt (3) dabei überall auf  $E$ , nicht nur f.ü. .

69 Dagegen ist i.a. die Funktion  $a(\frac{s+t}{2})U(s)$  nur für fast alle  $t$  aus  $R$  nach  $s$  lokal integrabel, entsprechendes gilt für  $V$  (der Beweis dieser Aussagen folgt durch Anwendung des Satzes von Fubini).

$a(\frac{s+t}{2})W(s,t)$  ist z.B. lokal integrabel, wenn  $a(x)$  oder  $W(s,t)$  lokal beschränkt sind, also speziell für stetige  $W(s,t)$ .

70 Man kann auch für den Fall  $W_0 = \infty$  noch Abschätzungen dieser Art angeben.

71 Für unstetige  $a(x)$  gilt dies i.a. nicht, z.B. ist nach dem Beweis von Satz 3.1 für elementare  $F(x,y)$  das zugehörige  $F(s,t)$  stets zweimal stetig differenzierbar,  $G(s,t)$  ist es aber beispielsweise dann nicht, wenn  $a(x)$  an einer inneren Stelle von  $I$  nicht beschränkt ist.

72 Für die  $U(s), V(t)$  gilt dies nicht, vgl. 42. Daraus kann man für jedes lokal integrabile  $f(x)$  die Existenz eines  $F_f(x,y)$  aus  $\mathcal{L}$  folgern, wenn nur  $g(x)$  auf  $I$  beschränkt bleibt. Im Falle eines beliebigen Intervalles  $I$  und eines beliebigen, nur lokal integrablen  $a(x)$  kann man ähnlich wie in Satz 3.4 ein  $g_2(x)$  angeben, sodaß jedes lokal integrabile  $f$  mit  $\|f\|_2 < \infty$  ein  $F_f(x,y)$  aus  $\mathcal{L}_2$ , also mit  $\|F_f\|_2 < \infty$ , besitzt.

72\* Bei passender Wahl der  $U, V$  (vgl. 4)).

73 Die in diesem Fall c) auch anwendbaren gewöhnlichen Existenzsätze für hyperbolische Differentialgleichungen geben die Existenz eines solchen  $F$  nur in dem größten Quadrat, dessen eine Diagonale das Intervall  $I$  auf der  $x$ -Achse ist, nicht jedoch die Existenz einer zweimal stetig differenzierbaren Lösung von (1) in dem ganzen Streifen  $P = I \times \mathbb{R}$  !

74 Diese Aussage gilt für alle Punkte von  $Q$ , nicht nur f.ü..

75 Ist  $2\delta_0 \geq |I|$ , so ist  $q_{x_0} = q, \delta = \frac{|I|}{2}$ ; sonst ist  $\delta = \delta_0$ .  $x_0$  ist dabei auf das Teilintervall  $[c+\delta, d-\delta]$  von  $I = [c, d]$  einzuschränken.

76 Man muß hier beachten, daß die  $U_0(s) = U_0(s; x_0)$  von dem gewählten  $x_0$  abhängen; der obige Beweis hat nur gezeigt, daß alle diese  $U_0$  in den zugehörigen Bereichen  $|s-x_0| \leq \delta$  verschwinden, jetzt geht man aber darüber hinaus.

77 Man muß voraussetzen, daß es ein echtes Intervall ist,

d.h.  $c < d$ ; (z.B. ist die Eindeutigkeitsaussage in 4) -  $W(s, t)$  bestimmt die  $U(s)$ ,  $V(t)$  i.w. eindeutig - im Falle  $c = d$  sicher nicht richtig).

78  $x_0$  kann dabei beliebig aus  $I$  vorgegeben sein.

Hat man ein  $x_0$  und ein zulassiges  $W(s, t)$ , so kann man ähnlich wie in § 1, Satz 1.1 dieses  $W$  leicht auch auf andere  $x_1$  aus  $I$  umrechnen.

79 Diese Voraussetzung ist notwendig, damit Lösungen  $F_f$  existieren.

80 Im Gegensatz zu  $U(s)$  und  $V(t)$  ist  $H(s, t)$  (und damit auch  $G$  und  $F$ ) i.a. nicht zweimal stetig differenzierbar (vgl. <sup>71</sup>).

81 also für alle  $|\eta| < \delta$   $\|F - T_\eta F\|_f < \varepsilon$ , d.h. für f.p.  $F$  ist die Abbildung  $T_t F : R \rightarrow f$  überall stetig in  $t$ .

82 kurz  $\|F - T_\tau F\|_f < \varepsilon$ .

83 Nach <sup>72</sup> existiert zu jedem  $a(x)$  eine Normfunktion  $\varphi_2(x)$ , sodaß es für jedes auf  $I$  definierte, lokal integrable  $f(x)$  ein  $F_f(x, y)$  aus  $\mathcal{F}_2$  gibt; Definition 7 ist also in dem Sinne nicht leer, daß man (bei geeigneter Wahl von  $\varphi(x)$ ) für jedes  $f(x)$  - wenigstens prinzipiell - in der Lage ist nachzuprüfen, ob  $f(x)$  a-f.p. ist. (Es wäre ja auch der Fall denkbar, daß gar kein  $F_f$  existiert, mit dessen Hilfe die Nachprüfung ja erst möglich wird).

84 Ist  $f(c) = f(d)$  (oder  $\lim_{x \downarrow c} f(x) = \lim_{x \uparrow d} f(x)$ ), so kann man, wie der Beweis von Satz 10.1 zeigt, auch noch  $\eta = 0$  zulassen.

85 Diese Voraussetzung ist schwächer als (vgl. Satz 4.1 u. <sup>81</sup>) "a")  $T_t F$  ist eine stetige Abbildung von  $R$  in  $\mathcal{F}$ ." (Mit a") könnte man beim Beweis auf Seite 37 unten einfacher  $E = \mathcal{F}$  setzen.)

Literaturverzeichnis

- (1) M. Berezanskij Über verallgemeinerte fastperiodische Funktionen und Formen, die mit Differential- und Differenzengleichungen zusammenhängen (russisch)  
Mat.Sbornik, n.S.32(74), S.157-194 (1953)
- (2) N. Bourbaki Topologie Générale, Chap. X (1949)
- (3) J. Delsartre Une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr  
Acta Mathematica 69, S. 259-317 (1938)
- (4) P.R. Halmos Measure Theory New York 1950
- (5) E. Kamke Differentialgleichungen reeller Funktionen  
Leipzig 1930
- (6) E. Kamke Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I, gewöhnliche Differentialgleichungen Leipzig 1942
- (7) E. Kamke Das Lebesgue-Stieltjes Integral  
Leipzig 1956
- (8) M.B. Levitan Verallgemeinerte fastperiodische Funktionen (russisch)  
Mat.Sbornik, n.S.24(66), S. 321-346 (1949)
- (9) W. Maak Fastperiodische Funktionen Springer 1950
- (10) W. Maak Fastperiodische invariante Vektormoduln in einem metrischen Vektorraum  
Math. Annalen, Bd.122, S.157-166 (1950)
- (11) W. Maak Eine Verallgemeinerung des Weierstraßschen Approximationssatzes  
Archiv d. Math., vol.VI, S.188-193 (1950)
- (12) Magnus-Oberhettinger Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik  
Springer 1943
- (13) V.A. Marčenko Verallgemeinerte fastperiodische Funktionen (russisch) Doklady Akad.Nauk SSSR, n.S. 74, S. 893-895 (1950)

### Lebenslauf

Am 21. Mai 1930 wurde ich in Fürth/Bayern als Sohn des Studienrates Hans Günzler geboren. Nach einem vierjährigen Besuch der Volksschule trat ich Ostern 1940 in das Neue Gymnasium in Regensburg ein, an dieser Anstalt legte ich im Juli 1949 das Abitur ab. Während meiner Schulzeit galt mein besonderes Interesse, neben der Mathematik, der Radiotechnik.

Im Herbst 1949 schrieb ich mich dann als Studierender der Naturwissenschaften/Mathematik und Physik an der Ludwig-Maximilian Universität in München ein, an der ich während meiner sämtlichen acht Studiensemester immatrikuliert war. Meiner Neigung entsprechend beschäftigte ich mich hier hauptsächlich mit reiner Mathematik, meine Lehrer waren dabei vor allem Professor Maak und Professor Aumann; besonders die Vorlesungen und Kolloquien von Professor Maak waren für mich sehr anregend, bei ihm fertigte ich auch meine Zulassungsarbeit - über ein Thema aus der Funktionalanalysis - an.

An Prüfungen legte ich während dieser Zeit die Vorprüfung für das Höhere Lehramt in Mathematik und Physik im Herbst 1951 sowie die Hauptprüfung in Mathematik und Physik im Herbst 1953 ab.

Von Januar 1954 an war ich als Studienreferendar dem pädagogischen Seminar des Wittelsbacher Gymnasiums in München zugeteilt, dort unterzog ich mich auch im Juni 1955 der pädagogischen Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen.

Daneben hatte ich schon seit Dezember 1954 Gelegenheit, am Institut für Geometrie der Technischen Hochschule München bei Professor Löbell als Verwalter einer Assistentenstelle tätig zu sein, nach Beendigung des pädagogischen Vorbereitungsdienstes übernahm ich dann diese Stelle ganz.

Schon während des Studiums hatte sich mein Interesse, besonders unter dem Einfluß von Professor Maak, der Theorie der fastperiodischen Funktionen zugewandt, seit 1955 beschäftigte ich mich, in dauerndem Kontakt mit Professor Maak, von dem ich

vieler wertvolle Anregungen empfing, gründlicher mit verschiedenen Themen auf diesem Gebiet; die hier als Dissertation vorgelegte Arbeit über "Hyperbolische Differentialgleichungen und Klassen fastperiodischer Funktionen" entstand 1957.

München, den 28. Oktober 1957

*Ernst Ginzler*





